いかにして真なる全称命題を創るか

－全称命題の証明の再考と「課題学習」の素材研究を通して－

中谷　清茂
中谷塾経営者＆講師

要　約

筆者は本稿で，前半は全称命題の証明を再考する．中学校学習指導要領解説の数学編に「証明は，命題が常に成り立つことを明らかにする方法であること」と「証明をするためにかかれた図は，全ての代表として示されている図であること」(p.113)と述べられている．この２要件を満たす命題は，全称命題であると考える．しかし，筆者の授業では，教科書等の問題を必ずしも全称命題として扱ってきたとは言えない．この要因は，教科書やとりわけ入試問題の文頭に「右の図で」等という表記があることにより，描かれている図のみで証明をしてきたことに起因していると考えた．そこで表記がない場合は全称命題として捉え，図に「動き」を与えて，「反例」があがる具体例を示した．一方，筆者の考えている狭義の証明の定義は「命題の真偽を明らかにすること」である．証明に「真」だけでなく「偽」も加えることで「反例」があげ易くなり，原命題を修正し，更に帰納を経て新しい真なる命題が産まれる．

後半は，「課題学習」の素材研究で筆者が考案した定理・予想等の具体例を挙げ，研究の成果とした．

キーワード：証明　全称命題　「額賀の定理」の発展

１．問題意識

筆者は具体例で数学を「創る」過程を提言する．我々は特称命題（描かている図のみを対象とした命題）に慣れすぎてはいないか．その結果全称命題までも，描かれている図のみで証明が完了していると考えがちである．この理由として教科書の問題や特に入試問題は特称問題が圧倒的に多いからであると考える．その上，全称命題の特徴として問題の文頭に「右の図で」「次の図で」等と図を限定する文言がないのに関わらず，両者の区別をしないで特称命題と「思い込んでしまう」ことが考えられる．具体例は後述する．それ故，文頭に「右の図で…」等と書かれている証明問題は特称命題であり，描かれている図のみを対象とした証明であるということを強く意識する必要があると考える．それに反して「右の図で…」等と書かれていない問題は全称命題として捉えることで上述の２要件を満たす証明問題になると考える．

更に，全称命題を特称命題として捉えてしまう要因は，教科書等の紙面に描かれた図は，自ずと「動き」が無いと言うことがあげられる．最近は教室の黒板が白板になり，ＩＣＴ活用の授業が充実してきて「動き」のある問題提示も可能になってきているが，定期テストや全国学テで可能になるかは疑問である．自分の頭の中で，あるいはサッとメモを取るなどして全称命題のイメージを掴み,反例をあげられるようになることが望まれる．

更に大切になることは，「批判的精神」である．常に「疑う」気持ちと「問題意識」を持ち続けることである．つまり「真実・本当のこと」を追い求めることである．このことは数学に限らず科学史の進歩を顧みれば明らかである．ガリレオは何を考えたか．また，林伸樹氏が「反例についての考察」の結語で何を述べているか．再考したい．

ここで，教科書の著作者に，次のような提案をしたい．それは，「問題に問題のある問題」を敢えて載せて頂きたい．このような問題は教科書には載っていないと考えるのが，常識であろう．
筆者は,教科書会社を批判するつもりは毛頭ない．むしろ，これこそ良い問題であると思っている．教科書会社の面子が潰れる，授業が混乱するとお考えなら，問題番号を朱にしたりその近くに★の印をつけて，教師も生徒にも注意の喚起を促すとよい．「教科書に間違いはない」と思っている生徒が「よ〜く考えると確かにおかしい」と思えるなら，それは価値のある問題だと言えるだろう．

特に，最近の生徒（教師）は言われたことは素直にこなしていくが，疑問を持ち続けて追究していく姿勢が乏しいと筆者は感じている．中教審の提起した「主体的・対話的で深い学び」を謳っているが,具体のない謳い文句では何の価値もない．

では，「問題に問題がある問題」が現行の教科書にあるのかと問われそうであるが，実際にあるのである．その具体の一部は後述する．

次に筆者の課題学習に対する基本的な考え方について述べておきたい．筆者が初めて課題学習の授業を行ったのは，1992 年頃だったと思う．その頃盛んに課題学習の授業の実践集などが出版されていた．それまで，教科書の問題を授業で扱うことが多かったので，新鮮であった．というより，平成２年に額賀博氏によって発見された新しい格子多角形の求積法の証明を，３ヶ月を要して閃いたその瞬間の悦びが，いつまでも筆者の脳裏にこびりついていた．それで，いつか授業をしたいと思っていたのである．それは，図形（直観）と数式(論理)のコラボレーションである.(中谷, 1992)

授業後の感想の多くは情緒的（びっくりした，不思議だ等）で岡潔（1963）を想起した．

４０年余の教員生活で「額賀の定理」の証明の発見とその授業（中谷，1994）はまたとない宝だ．

昨今，課題学習について同僚と話をすると「課題解決学習」のことですか？という返事が返ってくる．1990 年代に比べて，現代は確実に「下火」になってきていると感じるのは筆者だけだろうか？もし，このことが本当だとしたら，その原因を考えなくてはいけないだろう．

筆者は数学教育の学者ではない．従って論文の上に論文を積み重ねるような高邁な理論を述べるほどの知識も器もない．しかし一教師として４０年余の経験から，問題に思うこと述べてみたい．

Ⅰ．数学教育関係諸機関が肥大化・管理化した．
　個人の声が届きにくい→教師の発信力不足
Ⅱ．順位をつけたがる．国も県も地方も学校も
　教師も生徒も→要因は日本の学力の低下か？
Ⅲ．縦社会　横に繋がらない（草の根会の減少）
　個性に乏しい学校　Mail が上から現場へ
Ⅳ．日本全国一律主義→全国学テは最たるもの
Ⅴ．読書離れの日本人（大学生）一億総スマホ
Ⅵ．便利だが弊害もあるコンピュータ
　職員は職員室でひたすら仕事でＰＣに向かう
　学習プリント・テストを市販のＣＤやダウンロードして作成している．自作の問題の減少
Ⅶ．教員養成系大学の講義内容の変化（Ｓ大学）
　「純粋数学」の縮小と「数学教育」の拡大
　→授業内容で，数学的に観て本質的な問題点に気付かない教師がいる.具体例は後述する．

筆者は，３０年以上前に上記Ⅰ〜Ⅵに全く属さない学校（全校生徒４０名程，職員１０名程）に勤務していたことがある．心身ともに「元気」で，向上心が湧いてきた．本稿を執筆しているのもこの頃の体験があるからといっても過言ではない．

日本の進むべき方向を考え直す必要はないだろうか？筆者は教職の道を退いて４年目になるがこの問いは益々強くなってきている．

しかし，現代の若者にこの問いをぶつけても体験をしていないので響かない．また，歴史を遡ることはできない難しさがあるが，工夫をすれば改善できることもあると考えている．例えば，地方の教育研究会などで，主催者側であまり細かく計画を立てるのではなく，会員の意見やレポート発表が述べられる時間を確保することなどはできることだと思う．以上述べたことは，課題学習が衰退してきていることと関連があると筆者は考える．「反骨精神を持ち元気に生徒と向かい合える」ことが創造性を育む出発点であると思っている．

全称命題や課題学習の基本的な考えを述べてきたが，次章からは「反例」などの具体例や，中学校や高等学校での課題学習の具体例を提案する．

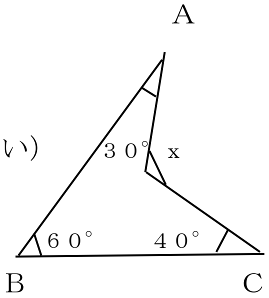
２．証明の定義の理解を促す問題について

現行の教科書に載っている証明の定義を理解させる問題は，「等長の線分がハサミのように交わっていて，線分の端点同士を結ぶとそのときにできる辺の長さは等しい」というものが多くの教科書会社で採用されている．この証明は「対頂角は等しい」や「三角形の合同条件」を使う．これらはもともと全称命題であるが，敢えて「動き」のある図を想定しなくても良いと思われるので，２要件を忘れがちになるという難点がある．

では，どのような問題を提示したらよいだろうか．筆者はこれまでに（中谷，2018）狭義の証明の定義を「命題の真偽を明らかにすること」とした．これを具体化する問題を提案する．

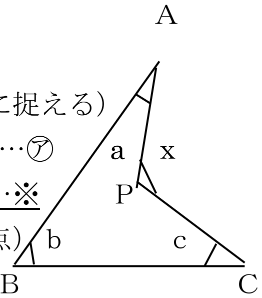
（１）導入（特称）問題　（補助線のいろいろ）

右の図の∠ｘの大きさを求めなさい．
（※分度器を使ってもよい）
また，どのように∠ｘの大きさを求めたか説明しなさい．



（２）点Ｐの位置を変える．　　**図１　特称的**

右の図で，点Ｐがどの位置にあっても
（ＧＣを使用して動的に捉える）
∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＝∠ｘ…㋐
が成り立つだろうか．…※
（点Ｐは同一平面上の動点）
（∠ｂ≦１８０°とする）



※（小倉，2011）を参考にした．**図２　全称的**

（３）下図のように補助線を与え，考察させる．

右の図で，点Ｐがどの領域にあっても
∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＝∠ｘ
が成り立つだろうか．
（角は連続的に変化）

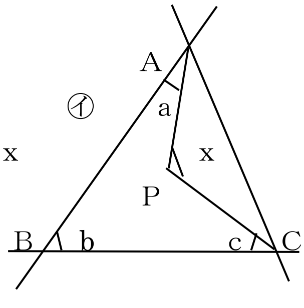


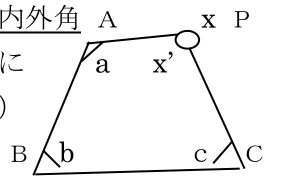
図３　領域

※同じような位置関係にある領域に留意させる．

（４）系となる全称命題の発見（以後∠は省略）

－系－

任意の四角形の１つの内外角は他の３つの内角の和に等しい．（筆者の造語）
ｘ＝ａ＋ｂ＋ｃ…㋐
ｘ：ｘ’の内外角（ｘ＋ｘ’＝３６０°）
※点Ｐが点Ａ，Ｃを除く半直線ＢＡ，ＢＣ，直線ＡＣ上にあるときも系は成立する．



㋐の証明）ｘ＋ｘ’＝360°…①　**図４　補助定理**
ａ＋ｂ＋ｃ＋ｘ’＝360°…②
①－②よりｘ＝ａ＋ｂ＋ｃ

Ⅰ．系が成り立つ領域（四角形ＡＢＣＰが構成される点Ｐの存在領域）のとき原命題は真である．
Ⅱ．点Ｐが直線ＡＣ上に，また半直線ＢＡ上，ＢＣ上にあるときは原命題は真である．但し点Ａ，Ｃは除く．（Ⅰは系より明らか．ⅡはⅠの特殊）
Ⅲ．ⅠとⅡ以外の領域では原命題は偽．
ア）点Ｐが図３の領域㋑では
ａ’＋ａ＝360°…①
ａ’＋ｘ’＝ｂ＋ｃ
ａ’＜ｂ＋ｃ…②
①，②よりａ＋ｂ＋ｃ＞360°
図より明らかに　ｘ＜360°
∴ｘ　≠　ａ＋ｂ＋ｃ（Ｐが辺を横切らない時）

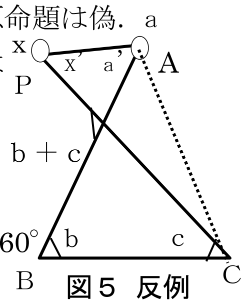


図５　反例

※「点Ｐが領域㋑のどこにあっても，結論のａ＋ｂ＋ｃ＝ｘは成り立っていない．このように仮定は成り立っているが，結論が成り立っていない例を『反例』という．１つ反例（対象領域の元）をあげればその命題は偽となる」ことを指導する．
イ）Ⅲ－ア）以外の領域も成立しない証明は後述する．ＧＣを有効活用．

Ⅳ．以上より，原命題が成立つ点Ｐの存在領域は右図の境界線を含む影の部分である．

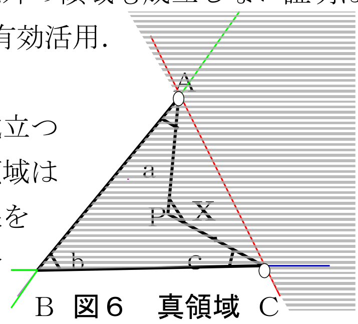


図６　真領域

このように，原命題が偽である場合でも，点Ｐの存在領域を限定（修正）することにより，真の命題とすることができる場合があることが分かる．

ここで，中学校学習指導要領解説の数学編と教科書による証明の定義と筆者の考案している定義の違いを本教材を通して明らかにしてみよう．

教科書などの証明の定義は，真なる命題の仮定から論理的に結論を導き出すものである．図６の影の部分のみを対象にした思考なのである．２要件もこの部分に限るものである．それに対して筆者の狭義の証明の定義（中谷，2018）は「命題の真偽を明らかにすること」である．従って，思考の対象は図６の平面全体に拡大する．そして影を除く領域にある点Ｐは全て反例の「元」になる．

教師も生徒も真なる命題の証明に慣れ過ぎてはいないだろうか．本教材のように「…成り立つだろうか」と問うことによって，「どっちだろう？」と迷うことが必要だと思う．試行錯誤して，影の領域が成り立つ領域だと辿り着く．但し，この道は平坦でないので「課題学習」として後日挑戦させたい．証明の導入では，成り立つ領域と成り立たない領域があることに気づかせたい．証明の定義の理解は段階的に深める必要があると考える．

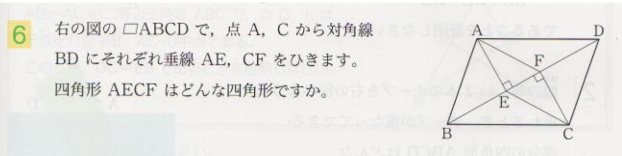
３．全称命題として捉えると

教科書の「右の図で…」等が文頭に含まれる証明問題（特称命題）を，「右の図で…」等を削除することによって得られる全称命題で，どのような価値が生まれるか，下記に同じような２つの具体例を比較する．以後平成２７年検定済み教科書．

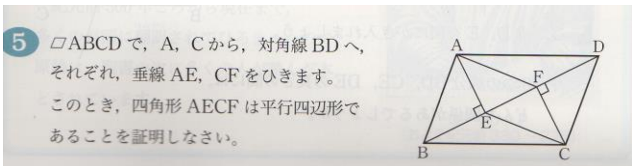
※「右の図で…」等あり→大日本図書，数研出版

〃　なし→啓林館，学校図書，東京図書

大日本図書　２年　ｐ１７３　６


6 右の図の ▱ABCD で，点 A，C から対角線 BD にそれぞれ垂線 AE，CF をひきます。
四角形 AECF はどんな四角形ですか。

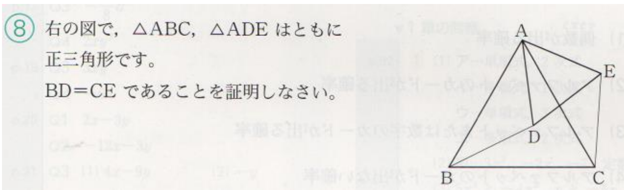
啓林館　２年　ｐ１４５　５


5 ▱ABCD で，A，C から，対角線 BD へ，それぞれ，垂線 AE，CF をひきます。
このとき，四角形 AECF は平行四辺形であることを証明しなさい。

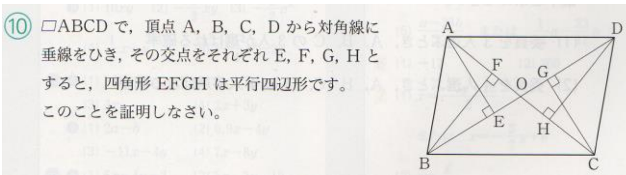
授業で上記２つの問題を同時に半数ずつの生徒に分けて解かせたらどうなるだろうか．筆者は現場を離れているので直接試すことはできないが，４０年余の経験から判断すると，殆ど同じ解答が出てくると思われる．大日本図書の文頭には「右の図の」とあり，啓林館の文頭には「右の図」という表現はない．このことから，前者は特称命題，後者は全称命題と捉えて良いだろう．全称命題とすると，仮定の▫ ＡＢＣＤをひし形としてもなんら問題はない．しかし，ひし形とするとその対角線は直交するので，結論の四角形ＡＥＣＦは潰れてしまい対角線ＡＣになってしまう．では，大日本図書のように特称問題にすべきだろうか．筆者はそのようには考えない．全称命題にすることにより，反例があがるが，文頭に「ひし形ではない▫ ＡＢＣＤ…」等として真の命題とすることができる．しかしこの場合，教科書会社は生徒が困惑する懸念があるため「問題に問題がある問題」となってしまうので，これを避けるために問題番号を朱にしたり，その近くに★などの記号を付けることにより，注意を喚起し，困惑を解消させたい．

※啓林館の指導書の「指導の要点」に「ここでは，四角形ＡＢＣＤは，ひし形でない平行四辺形を考えている．」とある．（p.145）筆者の考えは，「問題に問題がある問題」以外は「書かれている問題は，過不足なく条件を含んでいることが必要である」と考える．証明問題はあくまでも命題である．然もなくば，前述したように朱か★をつけたい．

大日本図書　２年　ｐ２２５　⑧


⑧ 右の図で，△ABC，△ADE はともに正三角形です。
BD=CE であることを証明しなさい。

大日本図書　２年　ｐ２２５　⑩


⑩ ▱ABCD で，頂点 A，B，C，D から対角線に垂線をひき，その交点をそれぞれ E，F，G，H とすると，四角形 EFGH は平行四辺形です。
このことを証明しなさい。

要約の数学編に書かれていることは，全称命題に対する証明のあり方が述べられている．このことを念頭において，２つの上記問題を考察すると次のような疑問が湧いてくる．⑧は，冒頭に「右の

図で」という語句があるが，このことで，特称命題になる．しかし，この「右の図で」を省略すると全称命題になる．確かに，頂点Ａを中心にして，どんな２つの正三角形を３６０°回転しても結論が成り立つ．合同な正三角形がぴったり重なっても，ＢＤ＝ＣＥ＝０で成り立つ．辺の長さの違う正三角形が重なる場合は，ＢＤ，ＣＥは正三角形の辺の長さの差になり，ＢＤ＝ＣＥになる．

これらは，三角形の合同条件を使わない証明法である．また，他の証明には三角形の合同条件（二辺峡角相等）を使っていることから，正三角形を合同な三角形に発展させることができる．

また，△ＡＢＣ ∽ △ＤＥＦとすることにより，ＢＤとＣＥが，もとの三角形の相似比に等しい線分になることも考えられる．

あるいは,合同の定義で△ＡＣＥを△ＡＢＤに回転移動すると重なることにより，ＢＤ＝ＣＥを導くこともできる．三角形が潰れる場合も明らかに成り立つ．本問は問題創りに有効な問題である．

これと類似の問題が日本文教出版に「『深める学習」』条件を変えて考えよう」がある．これは，明らかに全称命題を意識したものであるが，なぜこの位置（図形単元の最後部）にあるかが疑問である．何故なら，前述したように学習指導要領の２要件「証明は，命題が常に成り立つことを明らかにする方法であること」や「証明をするためにかかれた図は，全ての代表として示されている図であること」は全称命題の証明に関わることである故,常に意識をしておく必要があるからである．

２要件は，言い換えれば「全称命題」を証明するためのものである．この要件を教科書に載せるか否かはいろいろ考え方があると思われるが，筆者は載せるべきであると思う．何故なら，筆者自身も現役の時に，この２要件はあまり意識せずに教壇に立っていたという事実があるからである．

今思えば，問題の文頭に「右の図で」等の存否に関わらずその図のみで証明していたからである．尚「右の図のように」という曖昧な表現は避けるべきである．では，いつ，どのような教材でこの要件を生徒に教授したら良いのだろうか？

そこで生徒の学習順序として，一般的に考えられるのは特称命題→全称命題であるが，筆者は１時間の授業中に２つの命題を同時に扱いたい．

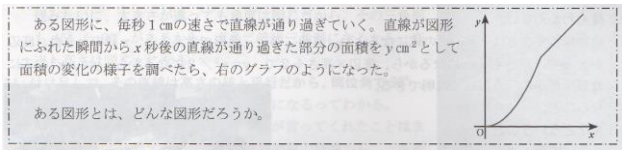
前頁の⑩の問題は前置きがなく，いきなり「▱ＡＢＣＤ」が表記されている．従って，この命題はどんな平行四辺形であるか限定がないと考えられる．よって前記中学校学習指導要領の数学編に述べられている２つの要件を満たすことになる．

すると，平行四辺形ＡＢＣＤがひし形になることも可能になる．ひし形の対角線は直交するので四角形ＥＦＧＨは，中心Ｏになる．つまり１点になる．反例があがったので，原問題を真にするために冒頭に「ひし形ではない」を付け加えるか,「右の図で」を加えることで特称命題にすることで偽であることから避けられる. 反例は, 図に「動き」・「特殊」を与えることで気づく事が多い．

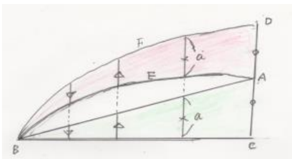
筆者は前回改訂の７社の中学校教科書で２０問の「問題に問題がある問題」などに気づいている．

＜研究授業から考えさせられたこと＞（追記）

筆者は下図等を授業者に電話やＦＡＸで伝えた．


ある図形に、毎秒１cmの速さで直線が通り過ぎていく。直線が図形にふれた瞬間から x 秒後の直線が通り過ぎた部分の面積を y cm² として面積の変化の様子を調べたら、右のグラフのようになった。

ある図形とは、どんな図形だろうか。



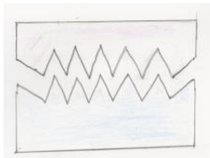


図７　放物線部分　　　　図８　半直線部分

授業の終末での結論は「三角形」,「長方形（平行四辺形）」としたが，本当だろうか？グラフの曲線部分に対応する図形は，もちろん図７の△ＡＢＣもそうであるが，その上にある図形ＡＥＢＦＤも「カヴァリエリの原理」から明らかに成り立つ．しかも逆走しない曲線ＡＥＢの取り方は任意で形は無限にある．グラフが半直線の部分も，図８のように同様にその形は無限に存在する．「図形からグラフ」（特称）の逆思考「グラフから図形」（全称）を狙った授業であるが，「逆は必ずしも真ならず」である. 授業の終末に授業者が「こんな図形はどうかな？」と模造紙や書画カメラなどで提示できる．教師の出で，生徒の視野を一層広げ,深めることが期待できる場面だと思われる．

（点線枠内の問題は算数数学教育研究会誌より）

４．課題学習

（１）図３の㋑を除く系以外の領域での偽の証明

①点Ｐがｂの対頂角内にあるとき，補助定理より

$(360^\circ - x) + (360^\circ - a) + c = b$

$a + (b - c) = 720^\circ - x$

$x = 720^\circ - a - b + c$

$= a + b + c$ とすると

$a + b = 360^\circ$ …※

鋭角 ∠ＰＡＢ＜ｂより

※は矛盾である．

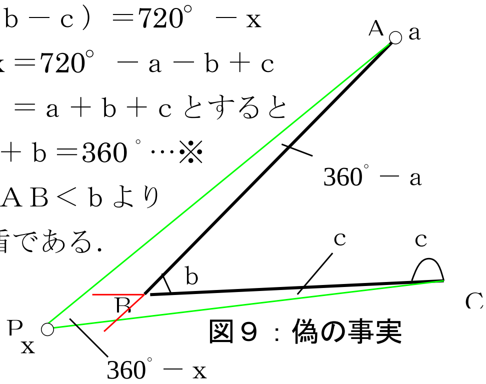


図９：偽の事実

$\therefore\ x \neq a + b + c$

もし∠ＢＣＰ＞180°のときも矛盾が生じる．

$(360^\circ - a) + (360^\circ - x) + (c - 180^\circ) = b$

$540^\circ - a + c - x = b$

$540^\circ - a + c - b = x$

$540^\circ - a + c - b = a + b + c$ とすると

$2(a + b) = 540^\circ \quad a + b = 270^\circ$

図より明らかに $a + b > 360^\circ$ →矛盾

$\therefore\ x \neq a + b + c$

（※上記証明法は背理法である）次に例をあげる．

「2 は素数である」であることの証明

「2 が素数でないとすると，1 と 2 以外に約数を持つ」これは矛盾．よって「2 は素数である」．

②点Ｐが半直線辺ＣＢの延長線上にあるとき

∠ＢＣＰ＝ｃ＝０°

$(360^\circ - a) + (360^\circ - x) = b$

$\therefore\ a + b + c = 720^\circ - x$ →∴a=360°

今，$720^\circ - x = x$ とすると $x = 360^\circ$ ↗ ｂ＝０° となり㋐は成立する．点Ｐが辺を横切る時は不成立．

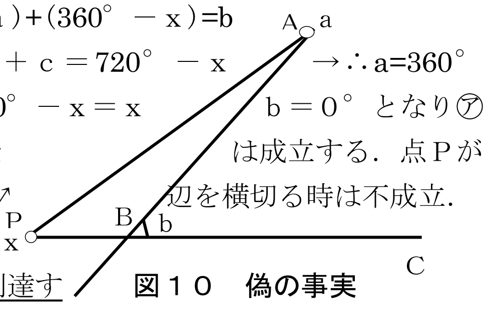


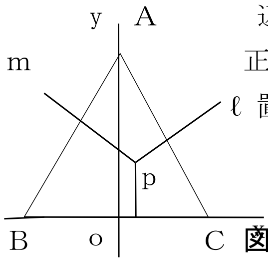
図１０　偽の事実

※点Ｐに到達するのに辺ＡＢ，ＢＣを横切るか否かでｘ，ａ，ｃの大きさは異なるが，図６影の領域外は偽になる．

（２）ヴィヴィアーニの定理　(1659)

正三角形の内部（辺上や頂点も含む）に１点Ｐを取る．この点Ｐから各辺までの距離の和は，この正三角形の高さに等しい．

①　筆者の解析幾何学的証明（略解）



辺の長さが２であるような正三角形を図のような位置に置いて，点Ｐから各辺への距離の和が $\sqrt{3}$ になることを示す．（高校生対象）

図１１：座標の適用

授業では，垂線の和を実測・発表させて．ほぼ同じ値になることを確認した．値が正三角形の高さになることを予想した．ＰをＣに置いた生徒もいた．

ℓ: $y - b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x - a)$　（Ｐ(a, b)とした）

{

AC: $y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

二直線の交点の座標 $\left(\dfrac{a-\sqrt{3}\,b+3}{4},\ \dfrac{-\sqrt{3}\,a+3b+\sqrt{3}}{4}\right)$

Ｐ(a, b)と上記の交点との距離は

$$\sqrt{\left(\frac{3a+\sqrt{3}\,b-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\,a+b-\sqrt{3}}{4}\right)^2} =$$

$$\frac{\sqrt{\left(-\sqrt{3}\,a-b+\sqrt{3}\right)^2}}{2} = \frac{-\sqrt{3}\,a-b+\sqrt{3}}{2} \quad \cdots①$$

m: $y - b = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x - a)$

{

AB: $y = \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

同様にして，Ｐ(a, b)とmの交点までの距離は

$$\frac{\sqrt{3}\,a - b + \sqrt{3}}{2} \quad \cdots②$$

求める3垂線の和は①＋②＋ｂであるから

$-b + \sqrt{3} + b = \sqrt{3}$

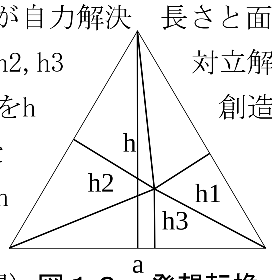
（延べ所要時間：約5時間）

②　生徒の証明　６人が自力解決　長さと面積　対立解消　創造性

３つの垂線の長さをh1, h2, h3とし，正三角形の高さをh　１辺の長さをaとすると

$1/2 \cdot a(h1+h2+h3) = 1/2 \cdot ah$

$\therefore h1+h2+h3 = h$



（所要時間：約０．5時間）**図１２　発想転換**

（３）正六角形格子における格子多角形の求積法

①「額賀の定理型求積法」（中谷の第一定理）

$S_1 = m + n / 2$ …㋐　が成り立つ．

S_1：格子多角形の面積

m：格子多角形内にある完全な格子枠数

n：1辺と格子枠で囲まれた図形数

※2辺と格子枠で囲まれた図形は数えない．

格子多角形の隣り合う頂点の取り方は，辺を含む格子枠が，辺の中点を回転の中心とする点対称な図形※となる辺，あるいは線対称な図形※になる軸（多角形の辺）の両端点の2点を取れば良い．

略証）1つの辺を含む格子図形が辺を境にして互いに点対称図形，線対称図形のいずれかであることが2で割る意味である．1つの格子内に2辺と格子枠で囲まれた図形は数えない．（中谷，1994）

※但し，3辺と格子枠で囲まれた図形数がp個あるとすると，次の式が成り立つ．㋑は㋐の一般化．

$S_2=m+(n-p)/2$…㋑（穴空きも可）

等積変形，または点対称移動で2辺と格子枠に囲まれた図形になりP＝0．三角形の合併も可．4辺と格子枠で囲まれた図形の非存在性も可．

②「ピックの定理型求積法」（中谷第二予想）

$S_3=(m+3n)/6$　が成り立つ．

S_3：格子多角形の面積（凸多角形の時）

m：格子多角形の辺上にある格子点の総数

n：格子多角形の内部にある格子点の総数

※但し，m は3の倍数又は直上の3の倍数である．隣り合う頂点の取り方は前述の図形※が成り立つ時である．同一多角形では$S_1 \geqq S_3$であるが$S_1 > S_3$の時は，適当に分割すると等しくなる．

※2辺と単位格子枠で囲まれた図形で，その2辺が格子点上にある場合はその格子点は数えない．

証明）検討中．　　　（第一定理）　　（第二予想）

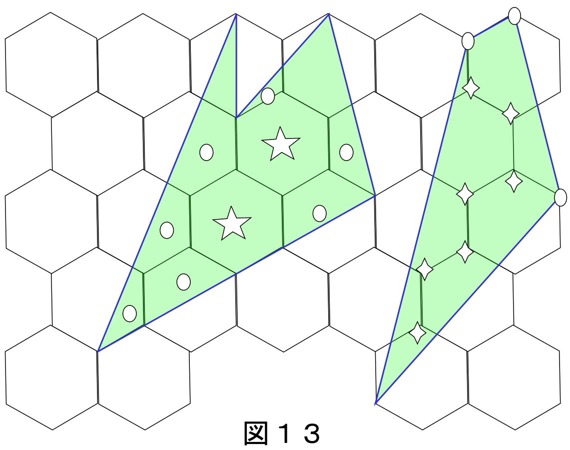


図13

$S_1=m+n/2$
$=2+7/2$
$=11/2$

$S_3=(m+3n)/6$
$=(3+3\times7)/6$
$=24/6=4$

○1つの格子枠に3辺が存在（2個）する例

$S_2=m+(n-p)/2=0+4/2=2$

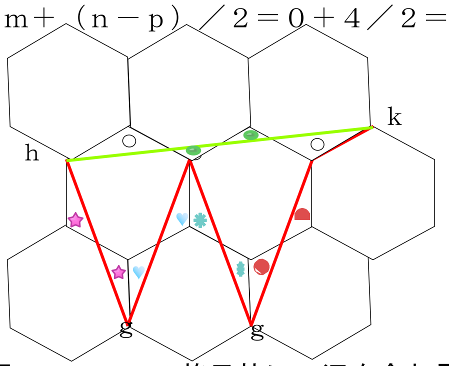


図14：1つの格子枠に3辺を含む具体

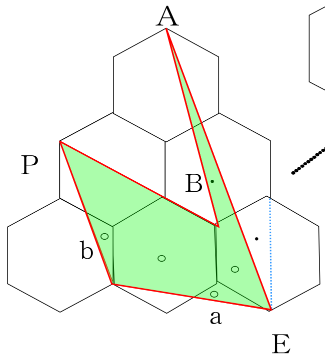
◎少し難しい求積の具体例

（i）図15を定理を用いて求積すると

図15の格子多角形の面積：$S_1=m+n/2$

○のついた図形数：n＝4　　$=0+4/2$

$=2$



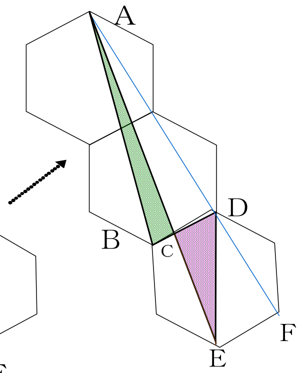


図15　辺での定義の具体例　図16　等積証明

（ii）図15で定理を使わないで求積をすると

ア）小さい三角形a，bを左隣の三角形に埋める．

イ）図16の△ABC＝△CEDを示す．

補助線AFを引く　EF＝1　とする．

$\triangle ABC=BC\times AD\times1/2$

$=1/3\times2\sqrt{3}\times1/2$

$=\sqrt{3}/3$

$\triangle CED=DE\times DC\times\sin60^\circ\times1/2$

$=2\times2/3\times\sqrt{3}/2\times1/2$

$=\sqrt{3}/3$

∴　△ABC＝△CED

（三平方の定理，平行線と線分の比を用いた）

※対象生徒：中学三年生 or 高校生

※定理では1つの正六角形格子の面積を1としているので，格子の1辺の長さを$x>0$とすると，$\sqrt{3}x^2/4=1/6$の正の解であるが，等しいことを示せばよいので1辺の長さを1とした．

（４）放物線の切片内の最大格子多角形の求積公式及びその内点の個数を求める公式（正方形格子）

○Ｓa,b,c を放物線ｙ＝ａｘ^{2}のｘ＝ｂからｘ＝ｃまでの切片の面積 S'＝｜ａ｜（ｃ－ｂ）^{3}／6

Ｓ'a,b,c を上記の切片内での最大格子多角形の面積とすると，○Ｓa,b,c＝Ｓ'a,b,c＋｜ａ｜（ｃ－ｂ）／６ ◎Ｓ'a,b,c＝｜**ａ**｜（**ｃ－ｂ－１**）（**ｃ－ｂ**）（**ｃ－ｂ＋１**）／**６** で与えられる．ただし，ａ，ｂ，ｃはａ≠０，ｂ＜ｃの整数とする．

（Ｓa,b,c＝｜**ａ**｜（**ｃ－ｂ**）^{3}／**６**　**１→０**）

改めて，上記放物線のこの区間における

Ｓ：放物線の切片内の最大格子多角形の面積

Ｈ：上記格子多角形の内点の個数　とすると

$$\boxed{Ｓ＝Ｈ＋（ｃ－ｂ－１）}$$

（Ｓ＝Ｓ'a,b,c）…★

※上記★の成立することは（中谷，1991）に記載．

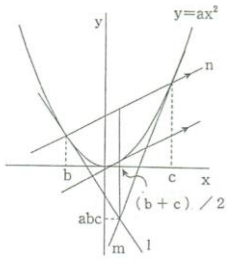
このことから，格子多角形の面積は，内点の個数と区間から，また内点の個数は格子多角形の面積と区間から求めることができる．Ｓは「額賀の定理」や「ピックの定理」からも求積できる．

○図１７のグラフでどんなことが成り立つか上げなさい．

また，その証明をしなさい．

・接線ℓ とｍの交点の座標

・放物線の切片の面積と，ｎの［ｂ，ｃ］を底辺とする切片内の面積が最大となる三角形の面積比 **図１７**



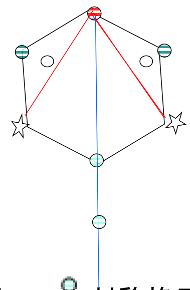
（５）真例を除いた命題創り：「真例命題」と呼ぶ

真例（しんれい）とは，筆者の造語で，反例の対義語で「正しい例」である．「偽なる命題で，仮定に真例がある場合は，それを全て除去し，更に結論を否定することによって，新しい真の命題ができる」（中谷，2018）具体例をあげると

① 原命題：偶数は奇数である．真例は空集合である．結論（奇数）を否定すると偶数になる．
真例命題：偶数は偶数である．（トートロジー）

② 原命題：2 の倍数は 3 の倍数である．偽
Ａ＝｛２，４，６，８，１０，１２，…｝
Ｂ＝｛３，６，９，１２，１５，１８…｝
原命題：集合Ａ ⇒ 集合Ｂ
真例の集合は｛６，１２，１８…｝で６の倍数である．これを仮定から省いて結論を否定すると
Ａ’＝｛２，４，８，１０，１４，１６，…｝
Ｂ’＝｛1，2，４，５，７，８，10，11，13，14，16，17，19…｝となりＡ’ ⊂ Ｂ’が成り立つ．
真例命題：「6 の倍数を除いた 2 の倍数は 3 の倍数ではない整数である」が形式的に産み出される．

③ 格子点で額賀の定理を扱う．図１９で直下でない格子点のみを通る辺の両端点を非対称格子点という．図１８（⊖と☆）図１９（ＡとＦ）その他の辺の両端点を対称格子点という．（ＡとＥ）
原命題：任意の正六角形格子の格子多角形は，「第一定理」が成立しない．（全ての辺の両端点は，対称格子点あるいは非対称格子点である）※真例
真例命題：正六角形格子の格子多角形の任意の辺の両端点が対称格子点であるとき，その格子多角形は「第一定理」が成立する．



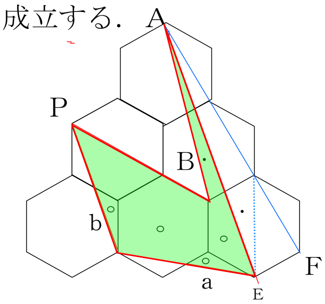


図１８⊖ 対称格子点 図１９ 格子点での成立例

引用・参考文献

林 伸樹(1968)．反例についての考察．論究，42．

平井安久・中谷清茂(1994)．クレセール 第５巻．(pp.241-247)．ニチブン．

中谷清茂・平井安久・能田伸彦(1992)．格子多角形の求積法について．日本数学教育学会，第２５回論文集，267-272．

中谷清茂(1993)．格子多角形の求積定理の発展．日本数学教育学会，第２６回論文集，345-350．

中谷清茂(2018)．学校数学における創造性を育む証明指導の研究・実践．日本数学教育学会，第５１回論文集，497-500．

中谷清茂（1994)．格子多角形の求積法の発見　教育科学 No.440．(pp.23-31)．明治図書．

中山正和(1948)．創造性の自己発見．講談社．

小倉直子(2011)．図形の証明の学習指導に関する研究．千葉大学修士論文．

＜附記＞
－シンメトリーは美しく力強い－

以上の原稿は，本年度日本数学教育学会第５５回秋期研究大会（福岡大会），第５４回（広島大会）第５３回（高知大会）に投稿したものである.

３年連続の大会に投稿した原稿は少しずつ改良したものの殆ど同じ内容である.

３回の査読（３人×３＝９人以内）の結果は全て総合判定が（ポスター発表）．つまり８頁の原稿を１頁にするという判定でありました.

これでは，研究の内容が読者の皆さんに理解して頂けないと判断して３回とも辞退しました.

もう一つの辞退の理由は，純粋数学（本文４．課題学習など）に対するコメントが査読者から全く頂くことがなかったということであります.

読者の皆さんからご意見，質問，感想など頂ければ幸いです.

以下，字数の関係で本文に載せることができなかったこと（正六角形格子の格子多角形の求積法を中心にして）を述べさせて頂きます.

「中谷の第一定理」の証明は，筆者の「額賀の定理」の幾何学的な証明と内容的には，ほぼ同じである．ただ正六角形の格子枠ということで「非対称格子点」が存在することになり，格子多角形が限定される．また，一つの格子枠に３辺と格子枠に囲まれた図形が存在することにより，新しい拡張公式：Ｓ＝ｍ＋（ｎ－ｐ）／２を必要とした.

次に「中谷第二予想」Ｓ＝（ｍ＋３ｎ）／６であるが, 上述の定理は面を数えるものであったが, この予想は「ピックの定理」や「森原の定理」のように，格子点の数を数えるものである.

この予想は，先の定理よりは単純ではなく，凹多角形や頂点を除く辺上に格子点が存在する場合には，公式に当てはまらない場合が出てくる.

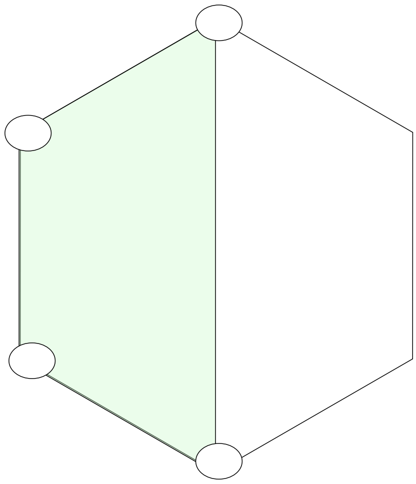
また，今のところ一つの反例があがっている．それは，一つの格子枠を半分にする四角形を考えると，面積は当然１／２であるが，Ｓ＝（ｍ＋３ｎ）／６＝（６＋０×３）／６＝１（周上の格子点は４，４の直上の３の倍数は６）これは反例.

但し，凸多角形でｍは頂点などの場合の総数：
＊ｍの数え方は、本文中にある条件を満たす．ｍは「点対称格子点」（辺を含む格子枠が点対称であり，その辺の両端点）両端点を除く辺上に格子点は無いとする．「線対称格子点」（対称の軸（辺）上の格子点）との和などで「予想」となる．（予想が線対称格子点では成立しない事がある）

凹多角形などに拡張した公式を導くことと，演繹的な証明を行うことが今後の課題である.

［中谷第二予想の反例］

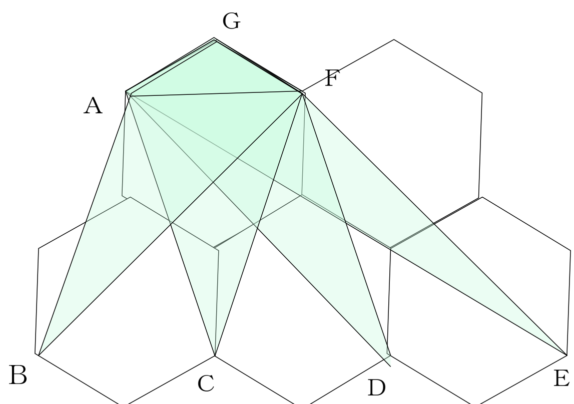
Ｓ＝（ｍ＋３ｎ）／６＝（６＋３×０）／６
＝１



ｍ＝６になるのは，辺上にある格子点は４であるので，４の直上の３の倍数は６だからです.

＜研究中に気付いたこと＞

四角形ＡＣＦＧの頂点Ｃはカウントしない．つまりｍ＝３で面積は１となる．このことは他の四角形や「第一定理」からも確かめられる.



＜結語＞

妻に研究のことを話すと「『蜂の巣』の面積を求めて何になるの？」と言われる．そう言われると返事に詰まってしまうのが本音であるが，何か高い次元の数学につながっているのではないかと思いながら，３年越しでひたすら帰納している.

＜再附記＞

「中谷第二予想」の拡張

凸多角形と凹多角形を統合した公式と思われるものが，ごく最近気づいたので載せておきます．

正六角形枠の格子多角形で，頂点が点対称格子点のみで，頂点を除いた全ての辺上に格子点が存在しないとき，次の公式が成り立つ．

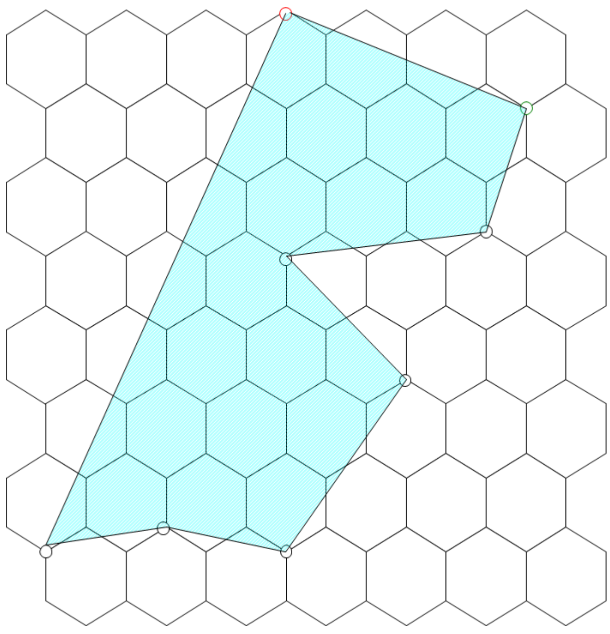
Ｓ＝（ｍ＋３（ｎ＋ｐ））／６

Ｓ：格子多角形の面積（単位格子枠＝１）

ｍ：頂点の総和．但し，３の倍数又は直上の３の倍数．また，１つの凹みを作っている２辺の点対称格子点（３個）は数えない.全ての凹みについて同様に数えない．

ｎ：格子多角形の内部にある格子点の総数

ｐ：凹みの総数（ｐ＝０の時，凸多角形）



周上の数える数（○の数）＝１　∴１→ｍ＝３

（○，○の付いている格子点は数えない）

ｎ＝３８　ｐ＝２

Ｓ＝（ｍ＋３（ｎ＋ｐ））／６

＝（３＋３（３８＋２））／６

＝４１／２

第一定理で上記の図形の面積を求てみよう．

Ｓ＝ｍ＋ｎ／２

＝８＋２５／２

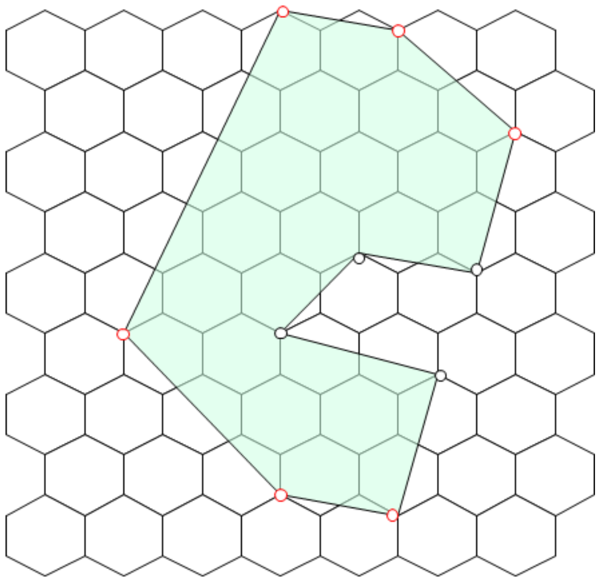
＝４１／２

こうしてみると，「第一定理」は若干の格多角形の取り方に制約があるものの，証明は「額賀の定理」と殆ど同様であることが分かった．改めて，額賀の定理の単純さと威力を感じさせられた．

一方，「予想」は格子多角形の取り方はかなりきつい制約があり，頂点の数え方もいろいろな条件がある．また、あくまでも予想なので，いつ「反例」があがるか分からない．しかし，「拡張」に至るのに，数百の具体例を乗り越えてきた．その間，いろいろな「発見」があった．面白いもので，それは図をみて考えている時ではなく，なんとなく「ふあー」と浮かんでくる．

今後の課題として，１つの格子枠内に３辺と格子枠で囲まれた図形を含む格子多角形をどう予想と結びつけるか．（直結かも？）そして，目指すは予想の証明である．　(2022/11/04)記

左記のように予想したが反例があがったので修正する．また，反例があがるかもしれない．



※凹みの数は，「くの字」で１個とする．

○の数＝６　∴６→ｍ＝６

（○の数え方:凸を作っている２辺の足の頂点と，凹の辺の足の頂点との共有点の数が０又は１のとき，凸の頂点（○）をカウントする）

ｎ＝４２　ｐ＝２

Ｓ＝（ｍ＋３（ｎ＋ｐ））／６

＝（６＋３（４２＋２））／６＝２３

Ｓ＝ｍ＋ｎ／２＝１１＋２４／２＝２３：一致

※ｍ（○）の数え方は要再考．(2022/11/22)記