5．証明について

この定理についての証明を３通り紹介する。

		証明者
Ⅰ	帰納的証明	本人（額賀博）
Ⅱ	幾何的証明	長野県飯田市立鼎中学校　中谷 清茂　教諭
Ⅲ	代数的証明	岡山大学　平井 安久　先生

次のように文字を定める。

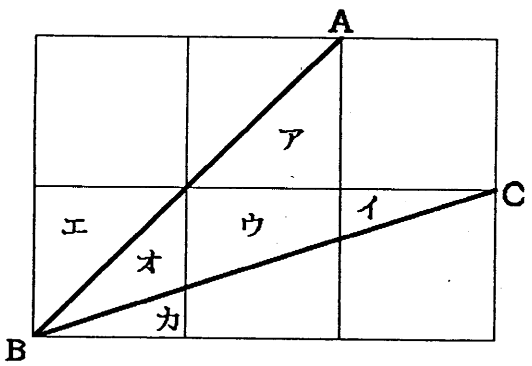
Ｓ；格子多角形の面積（単位格子の数）
ｍ；完全な正方形（格子枠）の数
ｎ；１つの辺と格子枠とで囲まれる枠の数｛下図では、ア・イ・ウの３個｝
ｐ；２つの辺と格子枠とで囲まれる枠の数｛下図では、オの１個｝

公式　$S=m+\dfrac{n}{2}$ ………………………… ①

Ⅰ　帰納的証明

１．多角形の１つの角（頂点）で証明を試みる。

まず、多角形の面積はｍとそれ以外の部分からできているので、それ以外の部分の面積を調べればよい。



ｐ｛左図では、オの部分｝の枠には必ず両側に｛エ、カ｝のような面積を求めない部分がある。
又、｛エ、カ｝と同じ形のｎ｛ア、イ｝の枠が存在する。

枠アを枠エに、枠イを枠カにそれぞれ移動すると｛ア＋オ＋イ＝１｝で正方形ができる。

従ってｐが１個とｎが２個で正方形１個（面積１）となる。

求める面積にｐが１個｛オ｝含まれている時、ｐが１個とｎが２個｛ア、イ｝で面積が１となるため、ｐを１個とｎを２個差し引き、その分面積１を加える。

上図では、ｐ＝１個｛オ｝
　　　　　ｎ＝３個｛ア、イ、ウ｝

ｎの枠から{ア、イ}を取り除いた部分{ウ}の面積は $\dfrac{n-2}{2}=\dfrac{3-2}{2}=\dfrac{1}{2}$ ……②

＊｛②については、この証明の後に証明してある。｝

$\frac{n-2}{2}$ のnにはもともとpは含まれていないので、pを1個とnを2個差し引いたことになる。これにその分{ア、オ、イ}の面積1を加える。

$$\frac{n-2}{2}+1=\frac{n-2}{2}+\frac{2}{2}=\frac{n-2+2}{2}=\frac{n}{2}$$

pが1個に対しnが2個で面積1となるので、
pが2個に対しnが4個で面積2となる。だから、
pがN個に対しnが2N個で面積Nとなる。

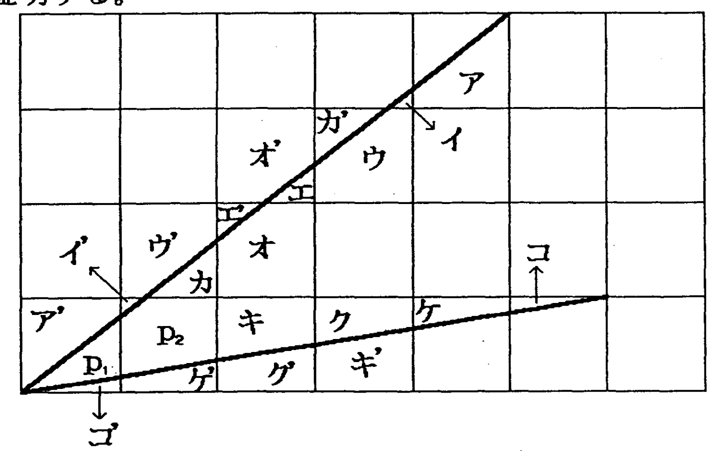
従って、pがN個の時は、

$$\frac{n-2N}{2}+N=\frac{n-2N}{2}+\frac{2N}{2}=\frac{n-2N+2N}{2}=\frac{n}{2}$$

となる。従って、pを数えなくても面積は求められる。
これにm（完全な正方形（単位格子）の数）を加えれば面積が求められ、公式①が成立する。
格子多角形は、このような角の集まりであるから、任意の格子多角形について公式①が成立する。

【証明終】

2．②を証明する。



任意の格子点と格子点を結んだ線分と各格子枠で囲まれたそれぞれの左右の枠は、線分の中点を中心とした点対称な図形となる。（上図では、アとア’というように同じカナの枠同士が、同形の枠となる。）このため、任意の格子点と格子点を結んだ線分の片側の枠の総面積は、線分が通過する正方形の数の1／2になる。……………………………③

［例］上図で、ア～コ，p_1，p_2の全面積を求めるとすると。

$p=2$個（p_1とp_2）で、それらの両側の枠にあてはまる枠がある。

p_1の両側の枠（ア’・コ’）にあてはまる枠；アとコ　∴p_1＋ア＋コ＝１
p_2の両側の枠（イ’・ケ’）にあてはまる枠；イとケ　∴p_2＋イ＋ケ＝１　……④

p_1, p_2に関係のある枠（ア･コ･イ･ケ）を除くと、残りは（ウ･エ･オ･カ･キ･ク）となる。枠（ウ･エ･オ･カ･キ･ク）は、枠（ウ’･エ’･オ’･カ’･キ’･ク’）のように同形の図形が存在する。

従って、pに関係のある枠を取り除いた枠の面積（ウ･エ･オ･カ･キ･ク）は③より、枠の個数を２で割ったものになる。

$n=10$個（ア･イ･ウ･エ･オ･カ･キ･ク･ケ･コ）
除く枠４個（ア･コ･イ･ケ）

枠（ウ･エ･オ･カ･キ･ク）６個の面積 $=\dfrac{n-4}{2}=\dfrac{10-4}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

これに④を加えると（ア〜コ，p_1, p_2）の全面積となる。$3+2=5$

pが１個に対し両側の枠２個が存在し、pと枠２個を合わせて面積が１となるので、
pが２個に対し両側の枠４個が存在し、それらの枠を合わせて面積が２となる。だから、
pがN個に対し両側の枠は２N個となり、それらを合わせた面積はNとなる。

pがN個のときのpに関係のある枠を取り除いた枠の面積 $=\dfrac{n-2N}{2}$ である。

$n<2N$の時は、pの両側に枠を入れた時の不足分の面積となる。

【証明終】

（備考）③は、次に紹介する幾何的証明の補助定理のことである。

Ⅱ　幾何的証明

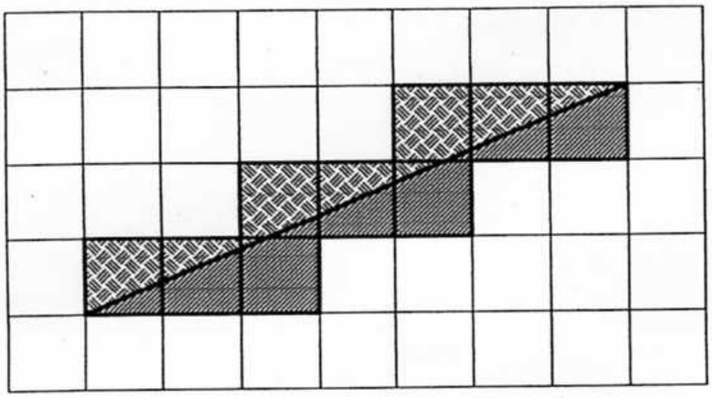
１．補助定理

いま、格子点を端点とする斜めの線分がある。このとき、この線分を含む正方形のうちで、線分と同じ側にある部分の総面積は、この正方形の総数（総面積）の１／２で与えられる。（正方形の面積を１とする）

［証明］

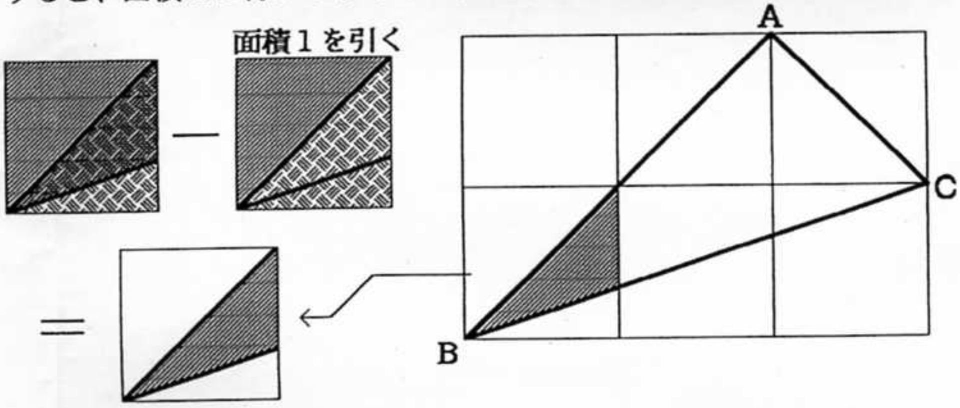
ｉ線分及びそれを含む正方形の総和で構成される図形は、線分の中点を回転の中心とする点対称図形である。故に、この図形を構成している任意の三角形、四角形又は五角形は、それと合同な図形を、点対称の位置（線分に対して反対側）に持つ。

ⅱ三角形の合同条件を適用して、線分の端から内側に次々に合同図形を見いだすことも可能である。



２．三角形への補助定理の適用

下図のような三角形の各辺に、補助定理を適用すると、ｐ（２つの辺と格子枠とで囲まれる枠）の正方形は２回数えられることになるので、その部分の正方形を数えないことにすると、面積１が除かれ、もとの図形のみが加えられることになる。



ところで、いま　Ｓ；三角形の面積

ｍ；辺を含まない正方形の数

ｎ；辺を１本含む正方形の数

ｐ；辺を２本含む正方形の数

ｒ；それぞれの辺が通過する正方形の個数の和（ｐを２回数えている）

とすると、　$S = m + r/2 - p$　（上図を参照）（～～～で補助定理の適用）

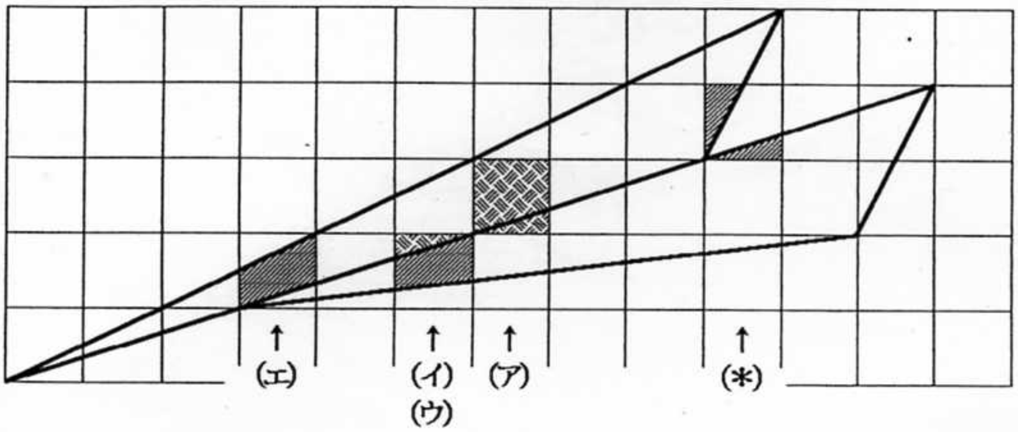
$= m + (r - 2p)/2$

$= m + n/2$

以上で、任意の三角形について公式①が成立することがわかった。

3．三角形で多角形を合成する。

格子多角形は三角形の和に分割することができる。ここで、個々の三角形については公式①が成立することは既に示された。次にこれらの三角形の合成によってできた図形に対しても公式①が成立することを示す。



2つの三角形が合成される時、2つの図形の境界となる線分が通過する正方形について以下のことが成立する：

正方形の内部を線分が1本だけ通過している形をS_1、正方形の内部を線分が2本通過している形をS_2、線分の通過していない正方形をS_0とよぶことにすると、

(ｱ)合成以前にS_1とS_1であったものが接してS_0となる
(ｲ)合成以前にS_1とS_2であったものが接してS_1となる
(ｳ)合成以前にS_2とS_1であったものが接してS_1となる
(ｴ)合成以前にS_2とS_2であったものが接してS_2となる

のうちのいずれかが起こる。したがって(ｱ)から(ｴ)の各場合とも合成以前の図形については公式①が成立することによりS_0、S_1、S_2の面積をそれぞれ1、1／2、0とみなしたのであるから、合成後も同様にS_0、S_1、S_2の面積をそれぞれ1、1／2、0とみなせば、2つの三角形の面積の和が求められる。よって合成された図形においても公式①が成立する。

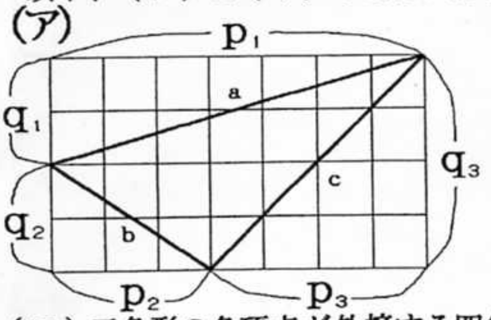
したがって、この合成を繰り返すことにより、三角形の合成により作られる図形、つまり任意の格子多角形について公式①が成立する。
(注意：(*)印の箇所は、S_2でなくてS_1が2個あるとして考える)

【証明終】

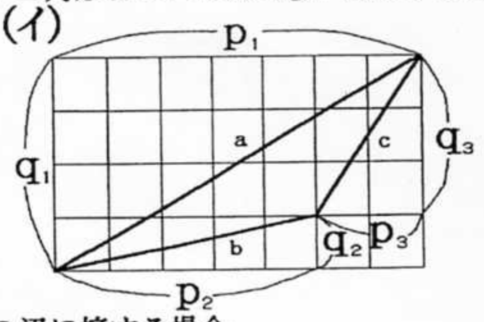
Ⅲ　代数的証明

記号を以下のように決める：
N(a)を辺aが通過する正方形の個数とする。同様にN(b)を、N(c)を定義する。集合論の記号を用いて、$N(a \cup b)$ は辺aまたは辺bが通過する正方形の個数を表し、$N(a \cap b)$ は辺aと辺bの両方が通過する正方形の個数を表す。m、nはそれぞれ幾何的証明で用いたものと同じである。
以下、（ア）と（イ）の場合に分けて、三角形について公式①が成立することを示す。

(ア)



(イ)



（ア）三角形の各頂点が外接する四角形の辺に接する場合

$$n = N(a \cup b \cup c) - N(a \cap b) - N(b \cap c) - N(c \cap a) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ここで、

$$N(a \cup b \cup c) = p_1 q_3 - (p_1 q_1 - N(a)) / 2 - (p_2 q_2 - N(b)) / 2 - (p_3 q_3 - N(c)) / 2 - m \cdot\cdot (2)$$

さらに、

$$n = N(a) + N(b) + N(c) - 2\,(N(a \cap b) + N(b \cap c) + N(c \cap a))$$

より、

$$N(a \cap b) + N(b \cap c) + N(c \cap a) = (N(a) + N(b) + N(c) - n) / 2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1)式に(3)式を代入することにより、

$$n = N(a \cup b \cup c) - (N(a) + N(b) + N(c)) / 2 + n / 2$$

$$\therefore n / 2 = N(a \cup b \cup c) - (N(a) + N(b) + N(c)) / 2$$

右辺に(2)を代入して、

$$n / 2 = p_1 q_3 - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) / 2 - m$$

$$\therefore m + n / 2 = p_1 q_3 - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) / 2$$

右辺は与えられた三角形の面積である。

（イ）三角形の頂点のうち一つが四角形の辺に接しない場合
(1)式、(3)式はこの場合も成り立つ。
次の(4)式が成立する。

$$N(a \cup b \cup c) = p_1 q_1 - (p_1 q_1 - N(a)) / 2 - (p_2 q_2 - N(b)) / 2 - (p_3 q_3 - N(c)) / 2 - p_3 q_2 - m \cdot\cdot\cdot\cdot (4)$$

したがって、(1)式に(4)式と(3)式を代入して、

$$n / 2 = N(a \cup b \cup c) - (N(a) + N(b) + N(c)) / 2 = p_1 q_1 - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) / 2 - p_3 q_2 - m$$

$$\therefore m + n / 2 = p_1 q_1 - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) / 2 - p_3 q_2$$

右辺は与えられた三角形の面積である。
三角形の多角形の合成については、Ⅱの３にのべたことと同様にしてできる。

【証明終】

6. この定理の応用について

［Ｉ］　単位格子（１つの格子枠）の面積が１でない時

この定理の面積は単位格子がいくつ分入るかを表しているので、単位格子の面積が１でなくても次の式で求められる。

$$S=\left(m+\frac{n}{2}\right)\times（１つの格子枠の面積）$$

［Ⅱ］　単位格子が正方形でない時

「５の証明について」のＩの③｛Ⅱの補助定理｝（任意の格子点と格子点とを結んだ線分の左右の枠は、線分の中点を中心とした点対称な図形となる）が成立する格子枠なら、単位格子が正方形でなくてもこの定理は扱える。
（単位格子（１つの格子枠）の面積が１でない時は、上記［Ｉ］の式で求める。）

（例）・平行四辺形・二等辺三角形・他

［Ⅲ］　コンピューターを使って地図や航空写真等のある部分の面積を求める。

ディスプレイに求めたい地図や航空写真等のある部分を表示し、格子枠の大きさを自由に変えながら求める面積と格子点とがうまくあう大きさで合わせる。
地図や航空写真等の縮尺の割合と上記［Ｉ］の式から面積を求める。（プログラムにすべて組み込めれば自動的に求まる）

7. 最後に

パズルや知恵の輪を自分の力でといた時のような感動を、数学の時間で子供達に味わえさせた時ほど、授業をしていて満足感のあふれるものはありません。
どうぞ、子供達と面積を求める競争をしてみてください。きっと、夢中になって食いついてくると思います。子供達がギブアップしたら、この定理を教えて上げてください。さらに夢中になって食いついてくると思います。
又、他の授業でも、色々工夫して素敵な授業を作り出してください。

~~茨城県鹿島郡鉾田町立鉾田北中学校~~ ← 当時の学校（H5年）
教諭　額賀　博