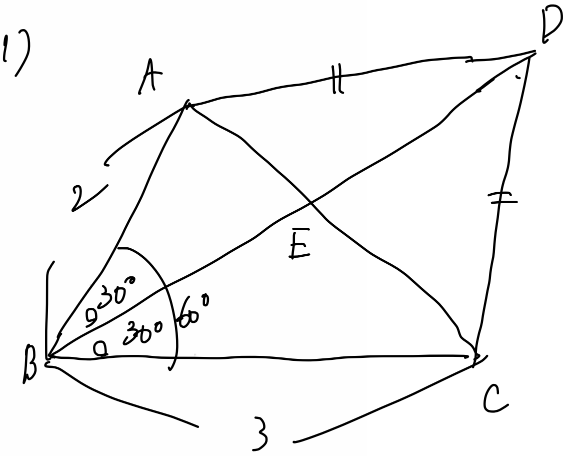
内積(範囲外)なしで　　2020/2/2

〔2〕 四角形ABCDにおいて AB : BC = 2 : 3，AD = DC とし，さらに ∠ABC = 60° とする。

(1)



(1) 線分BDが∠ABCを二等分するとき

$$\overrightarrow{BD} = \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\overrightarrow{BA} + \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\overrightarrow{BC}$$

である。　BEとBDの長さを求めるのがポイント

(2) BDとACの交点をEとする。EがBE : ED = 2 : 1 を満たすとき

$$\overrightarrow{BD} = \frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチ}}\overrightarrow{BA} + \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\overrightarrow{BC}$$

である。

(1) ACとBDの交点をEとする

角の2等分より，AE : EC = AB : BC
$= 2 : 3$

$\overrightarrow{BE} = \dfrac{3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}}{5} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

BEとBDは一直線上なので，kを定数として

$\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BE}$　$\left(k = \dfrac{BD}{BE}\right)$ ---- A

$S = $ △ABCの面積 $= \dfrac{1}{2}\cdot AB \cdot AC \sin 60^\circ$

$= \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ —①

また，

$S = $ (△ABE + △CBE)の面積なので，

$= \dfrac{1}{2}\cdot 2 \cdot BE \cdot \sin 30^\circ + \dfrac{1}{2}\cdot 3 \cdot BE \cdot \sin 30^\circ$

$= \dfrac{1}{2}BE + \dfrac{3}{4}BE$

$= \dfrac{5}{4}BE$ —②

①②より，$BE = \dfrac{3}{2}\sqrt{3} \times \dfrac{4}{5}$

$= \dfrac{6}{5}\sqrt{3}$

△ABDについて余弦定理より

$AD^2 = 2^2 + BD^2 - 2\cdot 2\cdot BD\cdot \cos 30^\circ$

$= 4 + BD^2 - 2\sqrt{3}\,BD$ —③

△CBDについて余弦定理より

$DC^2 = 3^2 + BD^2 - 2\cdot 3\cdot BD \cos 30^\circ$

$= 9 + BD^2 - 3\sqrt{3}\,BD$ —④

AD = BC なので，$AD^2 = BC^2$

③−④で，$\sqrt{3}\,BD = 5$

$BD = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

∴ $BD = \dfrac{5}{3}\sqrt{3}$

$k = \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\frac{6}{5}\sqrt{3}} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{18}$

Aより

∴ $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BE} = \dfrac{25}{18}\left(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}\right)$

$= \dfrac{5}{6}\overrightarrow{BA} + \dfrac{5}{9}\overrightarrow{BC}$ //

　内積(範囲外)なしで　2020 2/2

〔2〕 四角形ABCDにおいて AB : BC = 2 : 3, AD = DC とし, さらに $\angle ABC = 60^\circ$ とする。

(1) 線分BDが $\angle ABC$ を二等分するとき

$$\overrightarrow{BD} = \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\overrightarrow{BA} + \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\overrightarrow{BC}$$

である。

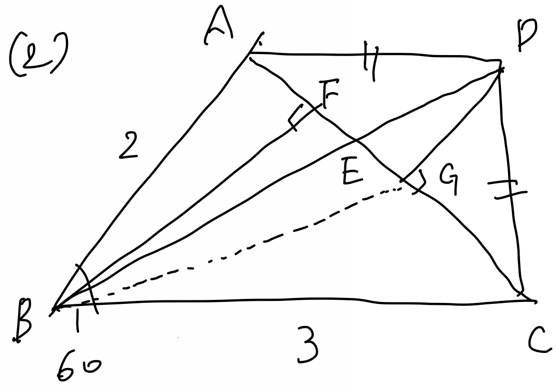
AD=DCより
※ △ADCは二等辺三角形。
△ADG = △CDGなので
AG = CG

(2) BDとACの交点をEとする。EがBE : ED = 2 : 1を満たすとき

$$\overrightarrow{BD} = \frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチ}}\overrightarrow{BA} + \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\overrightarrow{BC}$$

である。

(2)



※ △BEF ∽ △DEG および
BE : ED = 2 : 1 より, BF : DG = 2 : 1

(2) ACとBDの交点をE
BからACにおろした垂線とACの交点をF
DからACにおろした垂線とACの交点をG

△ABCについて余弦定理より

$AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot2\cdot3\cos60^\circ$
$= 4 + 9 - 12\times\frac{1}{2}$
$= 7$

$AC = \sqrt{7}$ $(AC>0)$

$S_1 = $ △ABCの面積 $= \frac{1}{2}\times AB\times BC\sin60^\circ$
$= \frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \frac{3}{2}\sqrt{3}$ ―― ①

また
$S_1 = \frac{1}{2}\times AC\times BF = \frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times BF$ ― ②

①②より, $BF = \frac{3}{2}\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

△ABFについて三平方の定理より

$AF^2 = AB^2 - BF^2$
$= 2^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2$
$= 4 - \frac{9\cdot3}{7}$
$= \frac{1}{7}$　∴ $AF = \frac{1}{\sqrt{7}}$ $(AF>0)$
$= \frac{1}{7}\cdot\sqrt{7}$

$FC = AC - AF$
$= \sqrt{7} - \frac{1}{7}\sqrt{7} = \frac{6}{7}\sqrt{7}$

∴ $AF : FC = 1 : 6$

$\overrightarrow{BF} = \frac{6\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AC}}{7} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD}$　上記※参照

$= \left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}+\frac{6}{14}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{14}\right)\overrightarrow{AC}$

$= \frac{13}{14}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$ //