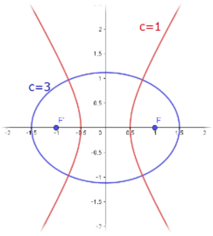
雑感　2 定点からの距離の□が一定

■　座標平面上に 2 定点 F(1, 0), F'(-1, 0) と動点 P(x, y)がある．

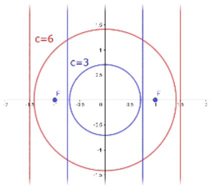
このとき，2 定点からの距離 PF と PF'について，その和，差，積，商；さらに距離の平方の和，差（積，商は改めて考察する意味がない）が一定の値 c のときの軌跡をまとめてみる．

■　距離の和や差については言うまでもなく，F，F'を焦点とするそれぞれ楕円と双曲線である．これらは数学Ⅲ（新課程では数学 C）で扱われ，方程式を導き出すのは（式変形の同値関係などの厳密性を意識すれば特に）やや難儀である．その性質などは，知らない性質も含めて山のようにあるはずだが，ここでは詳述しない．

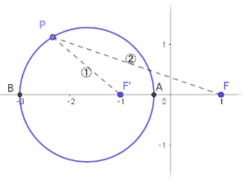


距離の平方の和，差については，それぞれ円，直線であり，こちらは易しく数学Ⅱレベルの話である．右図のように，c の値によって，F，F'と軌跡との位置関係に違いが出る．

c=4 のとき，F,F'は和の軌跡の円上にあり，このときこの円と差の軌跡の直線が接する．

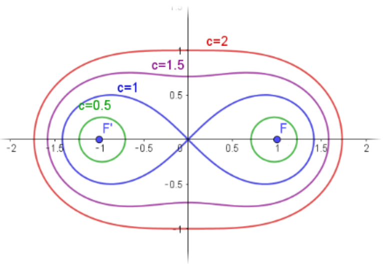


■　距離の商というと難しそうに聞こえるが，PF/PF'=c を PF=cPF' あるいは PF : PF'=c : 1 と書き直してみれば，c=1 のときは線分 FF'の垂直 2 等分線；c≠1 のときはアポロニウスの円でしかない．例えば c=2 のとき，右図のように，線分 FF'を 2 : 1 の比に内分する点 A と外分する点 B を直径の両端とする円である．



■　難しいのは「距離の積が一定」のケースである．c の値によって様々異なる外見の曲線が現れるが，一括してカッシーニの卵形線とよばれる．特に c=1 のときはレムニスケートと呼ばれる曲線となる．

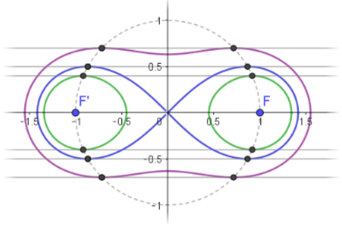
これらは x, y の 4 次方程式で表される 4 次曲線であり，いくつかの c の値に対する曲線を重ねて描けば，右のようになる．



x 軸との交点の x 座標は $\pm\sqrt{1\pm\sqrt{c}}$ (複号任意．ただし，これが実数であるとき)である．

このカッシーニの卵形上の点の極座標を(r, θ) とすれば，△OFP と△OF'P に余弦定理を適用し，PF^{2}PF'$^2=c^2$ に代入した関係式 $(r^2+1-2r\cos\theta)\ r^2+1+2r\cos\theta\ = c^2$ から，この曲線の極方程式 $r^2=\cos 2\theta\pm\sqrt{c^2-\sin^2 2\theta}$ が導かれる．

また，右図のように，円 $x^2+y^2=1$ との交点で極値をとり，交点が 4 個存在する場合は，対称性からその 2 点ずつを接点とする x 軸に平行な 2 重接線が存在するなど，調べていけば興味深い性質がいくつか見つかりそうである．



■　レムニスケートには，様々な面白い性質があるが，ここでは触れない．別の機会に譲ることにしたい．

2022 年 05 月 01 日