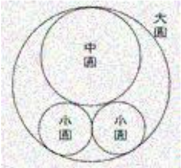
雑感　大円に内接する中円と小円

■　3 年理系のある生徒が，和算でよく見かける「大円に 1 中円と 2 小円が内接する図形」の研究を課題研究として取り組んだ．



研究を始める前には少し相談を受けたのだが，その授業を担当したわけではなかったので，(2 回ほど授業を覗かせてもらったが）その後ほとんどノータッチだった．

■　先日，その発表会があり，GeoGebra で苦労して描いたというその図がスクリーンに映し出された．

大円，中円，小円の半径をそれぞれ a, b, c とすると，

$c=\dfrac{4ab(a-b)}{(a+b)^2}$ の関係があることを導いたという発表があった．

中心を結んでできる 2 等辺三角形に，ピタゴラスの定理を使っていけば示せるそうで，そう難しいことではなさそうなので，ここではそれには触れない．

■　さて，その発表の中で，a, b, c のすべてを整数に設定できれば図が簡単に描けたのに，そういう例が見つからずに苦労したと述べていた．

質疑応答の中で，「どのように探したの？」と質問すると，「いろいろ代入して調べた」という返答だった．

数学の研究なので，ここをもう一踏ん張りしたら良い研究に発展していったのに残念なことであった．

■　$c=\dfrac{4ab(a-b)}{(a+b)^2}$ について考察する．a, b, c を有理数に設定するとき，比の値を決めればよいので，$c=1$ とする．

ここから，$(4b-1)a^2-2ab(2b+1)-b^2=0$ より

$a=\dfrac{b}{4b-1}\{(2b+1)\pm 2\sqrt{b(b+2)}\}$　…　①　を得る．

有理数 b に対して，a を有理数にするために，$b(b+2)=p^2$ となる有理数 p を探すことにする．

$(b+1)^2-p^2=1$ より $(b+p+1)(b-p+1)=1$　…　②

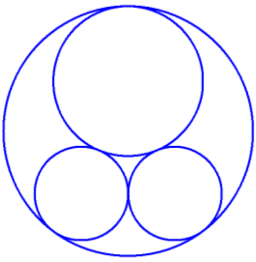
であるから，例えば 2 因数を逆数にして

$b+p+1=5,\ b-p=\dfrac{1}{5}$ としてみると，

$b=\dfrac{8}{5},\ p=\dfrac{12}{5}$ となり，①から $a=\dfrac{8}{3}$ となる．よって，

$a:b:c=\dfrac{8}{3}:\dfrac{8}{5}:1=40:24:15$ となって，

整数半径にできる（右図）．



■　一般的に②で，$b+p+1=k,\ b-p+1=\dfrac{1}{k}$ とすれば，

$b=\dfrac{(k-1)^2}{2k}$ となり，①から $a=\dfrac{(k-1)^2}{2(k-2)}$ となるから，

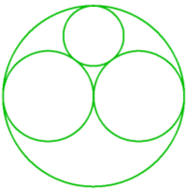
$a:b:c=k(k-1)^2:(k-2)(k-1)^2:2k(k-2)$　となる．

この式からわかることだが，$k>2$ である必要があった．

また，$b>c$ から $(k-1)^2>2k$ より，k を整数とすれば $k\geqq 4$ でなければならない．

$k=4$ のとき，$a:b:c=18:9:8$; $k=6$ のとき $a:b:c=75:50:24$; $k=7$ のとき $a:b:c=126:90:35$ となる．

ちなみに，$k=3$ のときは $a:b:c=6:2:3$ となって，右図のようになり，$b<c$ である．



2015 年 10 月 17 日