雑感

空間内の円の方程式

■　Google で「空間　円の方程式」で検索すると，「3 次元空間内での円の方程式を知りたい」といった質問サイトが上位に上がってくる．

　例えば，次のような 2 例がある（表記は見やすく変えた）．

「三次元空間内における円（球ではありません）を表す方程式が分かる方教えてください！」（YAHOO 知恵袋）．

「空間上にある，3 点 P1 (x_1, y_1, z_1) ,P2 (x_2, y_2, z_2) , P3 (x_3, y_3, z_3) を通る円の方程式を求めよ．

　平面の方程式は，法線ベクトルにより求められる所までは分かっています．空間における円の方程式は，球と平面の交線で表せるというのは，わかったのですが，この後，どーすれば良いのかが分かりません．どなたか，よろしくお願いします．」（教えて！goo）．

と言った具合である．

■　そこに寄せられた幾つかの回答があるのだが，先ほどの 2 つ目の質問に対するベストアンサーとして

「まずは，半径が r の円で中心が原点であるものを考える．

(1) 球の方程式 $x^2+y^2+z^2=r^2$

(2) 平面の方程式 $ax+by+cz=0$　a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 でない 2 つの図形の交点の集合．つまり (1)かつ(2)

もっと一般的に中心が原点に限らないよう拡張する．

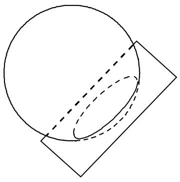
　半径 r の円の中心を (α, β, γ) にすると

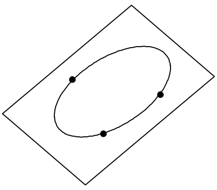
(1) 球の方程式　$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$

(2) 平面の方程式　$a(x-\alpha)+b(x-\beta)+c(z-\gamma)=0$　a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 でない　とおいたとき，(1)かつ(2)」

が載っている．

■　3 次元空間内の円として良く登場するのは，球面と平面の交線としての円であり，円の決定条件からすると，平面上の 3 点を通る円もよく想定されると思われる．





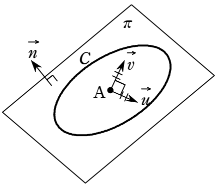
　しかし，上の 2 つの質問に対する回答は，上に載せたものを含め，どれも質問者の要求には応え切れていないと思われる．

　上のベストアンサーも，質問者がよく理解できないまま（したがって問題解決ができていないまま），質問者がベストアンサーとしてしまったものと推察される．

■　では，質問者が満足する回答とは何かというと，次のようになろう．

「円 C の中心を A (a, b, c)，半径を r とする．また，C が乗る平面 π の法線ベクトルを $\vec{n}$ とし，$\vec{n}$ に垂直で互いに直交する 2 つの単位ベクトルを $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ とする．このとき，t をパラメータとして，C の方程式は次のようになる．

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+r\cos t\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+r\sin t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}.」$$



■　球面と平面の交線としての円や，平面上の 3 点を通る円の方程式の計算による求め方，実用的で便利な求め方の具体例などについては，次のレポート（拙著）を参考されたい．

　「『空間内の円の方程式は？』に答える」雑誌『初等数学』第 82 号(2017.11 刊)．

　なお，この雑誌の入手については，以下を参照のこと(74 号~81 号の在庫があるとあるが，最新号 82 号も在庫があるはず).

https://shotosugaku.shopinfo.jp/pages/1182373/back-number

2018 年 02 月 01 日