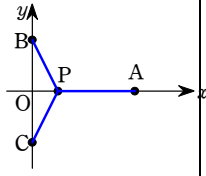


雑感

3線分の長さの和の最小値

■ 数学Ⅲの微分法的应用で最大・最小は重要なテーマである。基本的な指導の後、式に含まれる文字の値の範囲による場合分けの問題も扱いたい。そのとき、次の(自作)問題を取り上げることが多い。

座標平面上に3点 $A(a, 0)$, $B(0, 1)$, $C(0, -1)$ がある。線分 OA 上に点 $P(x, 0)$ をとるとき、 $PA+PB+PC$ の長さ $f(x)$ を最小とする点 P の位置を定めよ。ただし、 $a > 0$ とする。



■ $f(x)$ を求めることも、微分することも難しくはないので、取りかかりに時間がかからないのが嬉しい。

<解> $f(x) = (a-x) + 2\sqrt{x^2+1}$ ($0 \leq x \leq a$) である。

$$f'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

であるから、 $f'(x) = 0$ と

すると、 $2x = \sqrt{x^2+1}$ 。この両辺が負でないことに注意して両辺を平方すると、 $4x^2 = x^2+1$ で、 $x \geq 0$ から、 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。

(i) $\frac{1}{\sqrt{3}} < a$ のとき

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ で極小}$$

かつ最小

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	a
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$a+2$	\searrow	極小	\nearrow	$2\sqrt{a^2+1}$

(ii) $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

単調減少で、 $x = a$ で最小

x	0	...	a
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$a+2$	\searrow	$2\sqrt{a^2+1}$

■ 強いて言えば、 $f'(x)$ の符号の判断、すなわち $2x$ と $\sqrt{x^2+1}$ の大小の判断がやや難しい。とは言え、具体的な値の代入などで何とかなるだろう。

■ さて、この問題をこのように取り上げ解答を済ませても、多くの生徒は「解いた」「終わった」という印象でしかない。

この問題を、それで終わらせてはいけない。

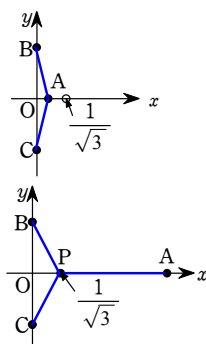
「この結果を見てどう思う？」と生徒に問いかけてみたい。

それだけでは反応が鈍いときは、(最初から次のような問題にすることもあるのだが) 具体的なイメージをつかませるために次のような話をする。

ある会社が広大な敷地を持っていて、A, B, C に工場があるんだ。工場間の行き来をするのに、できるだけ移動距離が少なくなるように、P 地点を設けて PA, PB, PC という道路を造ろうという話だね。で、P をどこにすれば良いかということなんだ。

この計算結果から、A が直線 BC に近い(正確には $1/\sqrt{3}$ 以下) のときは、A 工場と B 工場、A 工場と C 工場を直結する道路を設ければいいし、A が直線 BC から遠い(正確には $1/\sqrt{3}$ 以上) のときは、 a の値に関係なく、 $P(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ に設定すればよいということだね。 a の値にかかわらないところが不思議だね。

「そうか～」と言って、この問題の持つ意



味を、やっとな得してくれる。

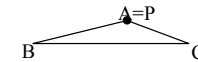
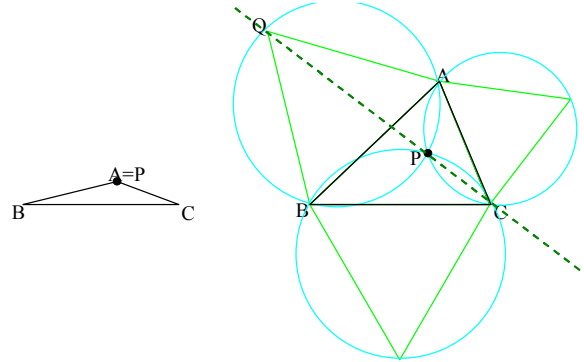
■ この内容は、次のように一般化できる。

△ABC に対して、 $PA+PB+PC$ の長さを最小にする点 P はどこか。

結論を記せば、

△ABC の最大角が 120° 以上のとき、最大角の頂点を P とする。

△ABC の最大角が 120° 未満のとき、 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ となる点が △ABC の内部にあって、その点を P とする。



図をかくのも大変だが、証明も容易ではなさそうだ。

右図の場合、正三角形 ABQ とその外接円の劣弧 AB 上の点 P に対して、よく知られたように $PQ = PA + PB$ が成り立ち、3点 C, P, Q が一直線上にあるとき、 $PA + PB + PC = PQ + PC$ の長さが最小となる。

なお、

<http://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/metadb/up/niikiyo/KJ00000049203.pdf> や

<http://www.h6.dion.ne.jp/~ooya/Suugaku/Saitan.pdf>

に関連事項が載っている。