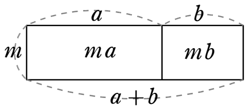
雑感　Proofs Without Words

■　Proofs Without Words （PWW）という試みがある．「言葉を用いない証明」だが「数式を用いない証明」でもある．

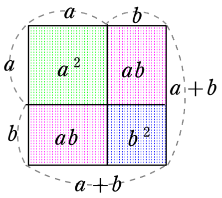
数学の証明は一般に数式や言葉を用いてなされるが，そういったものを用いず，「図を見ただけで分かる証明」を考えようというものである．



■　非常に簡単な例を挙げれば，展開・因数分解の公式　$m(a+b)=ma+mb$ を右上の図で理解・納得してもらおうというようなものである．

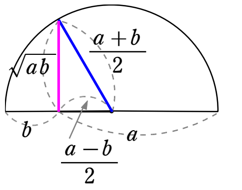
中学生レベルで言えば，

「$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ は右の図を見れば一目瞭然であろう」といった具合である．



■　高校レベルでは，不等式について，次のような図が教科書の見返しなどに載っていたりする．

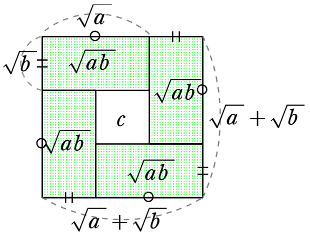
$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ という相加平均・相乗平均の関係が右の図から分かるというものだが，ピンクの線分の長さが $\sqrt{ab}$ となるということを，「見ただけで分かってね」というのにはやや無理があるような気がする．三平方の定理による若干の計算が必要だ．



同じ不等式について，右のような図も考えられるが，

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geqq 4\sqrt{ab}$

は良いとしても，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ へはこの式から，展開，移項などのプロセスが必要になる．

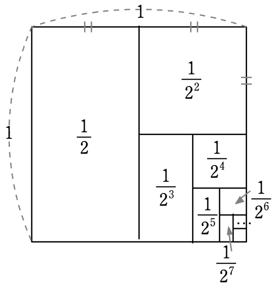


■　同じ図を見てもすぐに「なるほど」と了解できる人と，説明されてやっと理解できる人もいて，センスというかある種の数学力を試されるようなものもある．

難しい内容になると，補足的な式や説明が必要になってしまうものもある．その不要なものほど優れた PWW ということになろう．

■　右のような図から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$ を了解させようと言った「証明」もある．

無限級数がこのような図で了解できることは素晴らしい．しかも，この場合は，補足的な式や説明が不要であることも魅力的である．

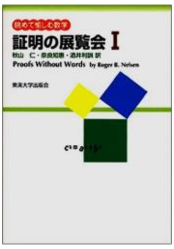


■　こういったことに関心を持って，「オリジナルの PWW を作る」というテーマを掲げて課題研究で研究した生徒もかつていたが，実際は製作に随分苦労していた．

PWW では，1 つの内容を図形の面積や長さなどに置き換え，別の観点で見直すことができることが必要で，総合的な数学能力を問われる試みだと言っても良いだろう．それだけに製作は容易ではない．

■　「PWW　mathematics」でネット検索すれば，具体的な PWW の例を幾つか見つけることもできる．

また，『Proofs Without Words』（Roger B. Nelsen）という書籍の翻訳が東海大学出版会から『証明の展覧会 I』『同 II』として出版されていて，多くの PWW が収められている．



中には図だけでは到底理解できず，説明の式などの助けを借りなければいけないようなものも含まれてはいるが，一見の価値はある．

ここに載っていないような公式の PWW を作ってみるのも一興である．

2017 年 07 月 01 日