雑感　分数漸化式のある解法

■　ある受験生が「大問の中にバラバラに別の内容の問題があって，漸化式の部分ができなかった」と言う．2015 年の名古屋工大の問題で，$a_{n+1}=\dfrac{2}{2a_n+3}$ という漸化式だというが，「逆数とってダメなら，特性解を引いて逆数とればよかったじゃん」と，途中まで計算してみせると，「ああ，そうだった」と．

しかし，「バラバラの問題」が気になって，問題を探した．

> 2 つの関数　$f(x)=\dfrac{2}{2x+3}$，$g(x)=\dfrac{2x+1}{-x+2}$ がある．
>
> (1) 関数 $g(x)$ の逆関数 $g^{-1}(x)$ を求めよ．
>
> (2) 合成関数 $g^{-1}(f(g(x)))$ を求めよ．
>
> (3) 実数 c が無理数であるとき，$f(c)$ は無理数であることを証明せよ．
>
> (4) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
>
> $a_1=g(\sqrt{2}),\ a_{n+1}=f(a_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$
>
> (5) (4)で定められた数列 $\{a_n\}$ の極限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

■　(3), (5)はオマケである．本質は(4)にある．(2)は計算するだけであって，$g^{-1}(f(g(x)))=-\dfrac{x}{4}$ になる．

出題者はもちろん，(2)を用いて(4)を解いて欲しいと思っているが，この仕組みを見抜けた者がどれだけいるだろうか．

$x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x))\xrightarrow{g^{-1}}g^{-1}(f(g(x)))=-\dfrac{x}{4}$　であり，

$a_n\xrightarrow{f}a_{n+1}$　である．そこで，$b_n\xrightarrow{g}a_n$ とすれば，$a_n\xrightarrow{g^{-1}}b_n$ であるから，$b_n\xrightarrow{g}a_n\xrightarrow{f}a_{n+1}\xrightarrow{g^{-1}}b_{n+1}$　である．

一方，$g^{-1}(f(g(b_n)))=-\dfrac{1}{4}b_n$ であるから，$b_{n+1}=-\dfrac{1}{4}b_n$ より，

$b_n=b_1\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ となる．

したがって，$a_n=g(b_n)=\dfrac{2b_n+1}{-b_n+2}=\dfrac{2b_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+1}{-b_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+2}$ とできるというのが，その仕組みである．

■　$f(x)$ に対して，$g^{-1}(f(g(x)))=kx$ となるように，$g(x)$ が作られている．ただし，この定数 k は $f(x)$ によって決まる値であることに注意が必要である．

よく知られたように(?)，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$　（≠定数）のタイプの漸化式で定められる数列について，特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ が異なる 2 解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき，a_n は $a_n=\dfrac{A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}}{C\alpha^{n-1}+D\beta^{n-1}}$ の形をしている．

$\beta\neq0$ のとき $a_n=\dfrac{A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}+B}{C\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}+D}$ であるから，k はこの $\dfrac{\alpha}{\beta}$ または $\dfrac{\beta}{\alpha}$ である．

実際，この $a_{n+1}=\dfrac{2}{2a_n+3}$ の特性方程式の解は $-2,\ \dfrac{1}{2}$ であって，

$k=-\dfrac{\frac{1}{2}}{2}=-\dfrac{1}{4}$　または　$k=-4$ であり，ここでは $-\dfrac{1}{4}$ になるように $g(x)$ が設定されている（多分，(5)を意識して）．

■　なかなか面白い仕組みである．こういった方法で解ける漸化式は，$g^{-1}(f(g(x)))=kx$ となるような $f(x),\ g(x)$ として考えれば，この 1 次分数関数以外には，1 次関数くらいしかないのだろうなあ．

1 次関数であれば，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ をこの方法で解くと言うことで現実的ではない．

■　さて，$f(x)$ の設定は容易だが，その $f(x)$ に対する $g(x)$ をどのように作ったのだろうか．もし，その作成が容易ならばこの方法でこのタイプの漸化式を解く解法が重い意味を持つことになる．

■　$f(x)$ に対して，特性方程式の解から $k=\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めておき，$g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ として逆関数を求め，$g^{-1}(f(g(x)))=kx$ となるように $a,\ b,\ c,\ d$ を求める方法では，なかなか大変である．

もちろん，$f(g(x))=g(kx)$ としてもよいが，これも意外に煩雑であるのは分数式の恒等式だからである．

■　ここで，これもよく知られたように(?)，「1 次分数関数 $f(x)=\dfrac{2}{2x+3}$，$g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ に，2 次の正方行列 $F=\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}$，$G=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ をそれぞれ対応させると，$f(g(x))$ には行列の積 FG が対応する」という性質を用いてみる．

$f(g(x))=g\left(-\dfrac{x}{4}\right)$ の関係は，$\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}$ となる．

ただし，分数式の「約分・倍分」のことを考慮に入れて，

$\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\gamma&0\\0&4\gamma\end{pmatrix}$ $(\gamma\neq0)$ とした方がよい．

これより

$a\gamma+2c=0,\ 2d-4b\gamma=0,\ 2a+c(\gamma+3)=0,\ 2b+d(3-4\gamma)=0$

が得られるが，g^{-1} が存在する ⇔ G^{-1} が存在する ⇔ $ad-bc\neq0$　に注意しながら解く（途中省略）と，$\gamma=1,\ a=-2c,\ d=2b$ となる．

$c=-1,\ b=1$ としたものが問題の $g(x)=\dfrac{2x+1}{-x+2}$ であって，これに限定されず，$g(x)=\dfrac{2x+2}{-x+4}$ などでも O.K.である．

実際に計算をするとよく分かるが，$g(x)$ の決定はあまり容易ではなかった（それとも，便法があるのかな？）．

■　この問題の類題を作るとすれば，特性方程式が重解を持つケースであろうか．

この場合は，途中に登場する数列が「等比数列」でなく「等差数列」であるから，その公差がいくつになるのかを知らなければ問題が作れない（別の方法で解いてみれば良いわけではあるが…）．

$f(x)=\dfrac{-9}{x-6}$ に対して $a_{n+1}=f(a_n)$ で数列を定めるとき，その特性方程式の解は，$x=3$ (重解)である．このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-3}\right\}$ は公差が $\dfrac{-1}{0-3(-1)}=-\dfrac{1}{3}$ である（c.f. http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~hirosawa/zenkashiki2.pdf）．

$g^{-1}(f(g(x)))=x-\dfrac{1}{3}$ となるようにするためには，$g(x)$ の作成について，$ad-bc\neq0$，$\gamma\neq0$ として，$\begin{pmatrix}0&-9\\1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix}3&-1\\0&3\end{pmatrix}$ を満たすものを見つければよい．

$a\gamma+3c=0,\ a\gamma=3b\gamma+9d,\ a=3c(\gamma+2),\ b+c\gamma=3d(\gamma+2)$ から，$a=0$ または $\gamma=-1$ が得られるが，$\gamma=-1$ のケースから，$a=3c$，$b=c+3d$ となる．これを満たすものとして，$a=3,\ b=4,\ c=d=1$ を採用すると，$g(x)=\dfrac{3x+4}{x+1}$ となり，$g^{-1}(f(g(x)))=x-\dfrac{1}{3}$ となる．

■　したがって，次のような類題ができる．

> 2 つの関数　$f(x)=\dfrac{-9}{x-6}$，$g(x)=\dfrac{3x+4}{x+1}$ がある．
>
> (1)　合成関数 $g^{-1}(f(g(x)))$ を求めよ．
>
> (2)　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
>
> $a_1=5,\ a_{n+1}=f(a_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$a_n=g(b_n)$ とすれば，$b_1=-\dfrac{1}{2}$，$b_n=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{n-1}{3}=-\dfrac{2n+1}{6}$ から，

$a_n=g\left(-\dfrac{2n+1}{6}\right)=\dfrac{3\left(-\frac{2n+1}{6}\right)+4}{-\frac{2n+1}{6}+1}=\dfrac{3(2n-7)}{2n-5}$ となる．

■　結局，工夫はあるものの余り応用の利かない解法だったように思われる．

しかし，私の考えの及ばない何かすごい仕組みが，実は隠されているのかも知れない．

2015 年 3 月 7 日