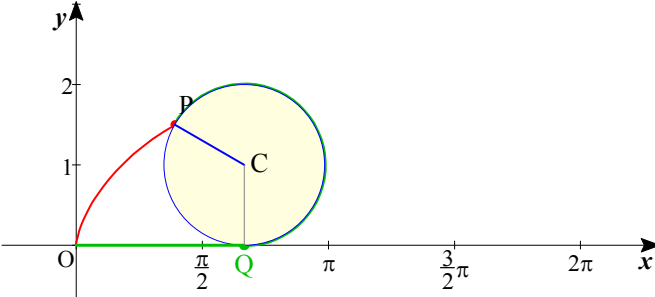


## 雑感 サイクロイド

■ サイクロイドの授業は難しいが、楽しい。  
適切な図をかいたり、運動を正しくイメージさせることが難しいから、(普段の授業では使わないのだが)パソコンとプロジェクタの出番である。

使うソフトはおなじみの Grapes. サンプルファイルや、ネット上にあるファイルを手直して使わせてもらったり、自作のファイルも少し用意して臨む。

■ まずは、直線上を円盤が転がる場合である。サンプルファイルの中の「サイクロイド\_説明.gps」が分かりやすく便利である。



円盤に張り付いた緑色の「テープ」が、円盤の回転に従って  $x$  軸に張り付いていくことから、弧  $PQ$ =線分  $OQ$  である様子が理解しやすい。

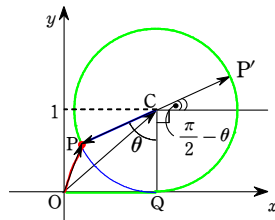
■ 方程式を導く段階では図を板書する。うまくかけずに苦労するが、いつもパソコンを使える環境にあるわけではないので、図を手書きする場面も生徒に見せなければならぬ。たとえ、無様な図になろうとも。

■ 方程式を導くとき  $\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP}$  と考える「ベクトルの利用」が応用が利くので便利であることは、よく知られている。しかし、それだけでは不十分で、私は次の2つのことが大切だと思い、そのように指導している。

①  $\theta$  を  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲の図をか

く

② 点  $C$  に関する点  $P$  の対称点  $P'$  を用いて  $\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} = \vec{OC} - \vec{CP}'$  とする



こう言ったことに注意した図を

かくと、 $\vec{CP}'$  の成分が「三角比」的に

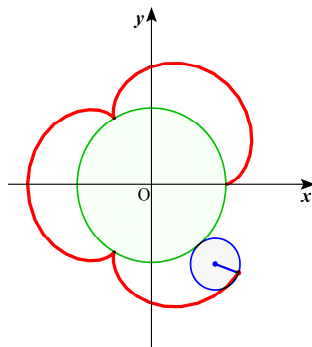
$(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta), \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)) = (\sin \theta, \cos \theta)$  と求めやすい。これより、

$\vec{OP} = \vec{OC} - \vec{CP}' = (\theta, 1) - (\sin \theta, \cos \theta) = (\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta)$  である。

■ 点  $P$  が円盤の内部にあったり、外部にあったりの図も、「係数」を変えるだけで、素速く表示できるのもパソコンのおかげで、ありがたい。

■ さて、先程の、「方程式を導く上の注意点」は、次のようなエピサイクロイドでも有効に働く。

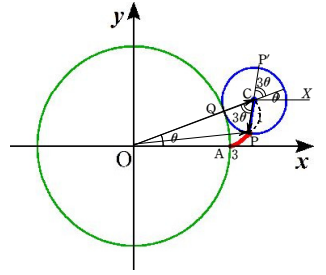
半径 3 の円盤状を半径 1 の円盤が回転するとき、半径 1 の円盤状の周上の点  $P$  の軌跡はエピサイクロイドである。



■ 方程式を導くに当たって、 $\theta$  を小さめにとった図をか

く。弧  $AP$ =弧  $PQ$  から  $\angle PCQ = 3\theta$  で、 $\angle XOP' = 4\theta$  となるので、 $\vec{CP}'$  の成分がわかる。

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OC} + \vec{CP} = \vec{OC} - \vec{CP}' \\ &= (4\cos \theta, 4\sin \theta) - (\cos 4\theta, \sin 4\theta) \\ &= (4\cos \theta - \cos 4\theta, 4\sin \theta - \sin 4\theta) \end{aligned}$$



■ さて、サイクロイドといえば、東京・大阪間にサイクロイドのトンネルを作る話は、生徒が喜ぶ話だ。

まずは、サイクロイドが「最速降下線」である話をする。「高校数学教材-Ikemath」というサイト上の

[http://www.geocities.jp/ikemath/grapes/GRAPES\\_III\\_EX.html](http://www.geocities.jp/ikemath/grapes/GRAPES_III_EX.html) 中の「サイクロイド 2」を利用させていただくが、シミュレーションであるだけに、説得力に欠けるのは致し方ない。

そこで、<http://www.youtube.com/watch?v=Bh6-zKwTupc> の動画を見せて納得してもら

そう。その上で、東京・大阪間にサイクロイドのトンネルを作

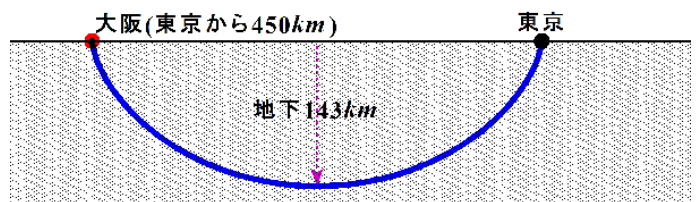
って、玉を転がしたとき、東京から大阪までどのくらいの時間で着くだろうか? と問いかけ、アンケートを採る。

1週間 1日 6時間 1時間 30分 10分 1分 1秒 等という選択肢で尋ねると 6時間や 1時間という答が大半を占める(今回の授業では 10分が 1人だけいた)。

そこで先程の「高校数学教材-Ikemath」の中の「サイクロイドトンネル」で、シミュレーションすると、みんなびっくり。

東京・大阪間に下図のような曲線で真空のトンネルを掘りました。東京から大阪までの所要時間はどのくらいだと思いますか?

経過時間 0 時間 0 分



■ どうしてもお話になってしまいがちな部分を、パソコン利用に興味を持ってもらうわけだが、先の「エピサイクロイドの方程式を導く問題は、大学入試では良く出題され、名古屋大学でも出たことがあるんだ」と言って、その方程式を導かせて授業を締めくくる。