雑感　楕円の方程式を導く便法

■　長軸の長さが $2a$ で，$\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ を焦点とする楕円の方程式が $b^2=a^2-c^2$ とおいて，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ となることを導くのは，教科書に載っていることではあるが骨が折れる．

一般には，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおき，$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$ を満たすことから
$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ とし，
$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ の両辺を平方し，
さらに，$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$ の両辺を平方する．
$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ から $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$
となって，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ となる．

■　実際に授業で扱うと，(特に計算力のない)生徒にとっては，1 回の平方で根号が消えず，(移項という工夫をした)2 回の平方で計算量が多く，自力で導かせるのは大変である．
さらに言えば，同値性の問題もあり，厳密な導出は容易でない．教科書でも，同値性はぼかしてあるものがほとんどである．

■　雑誌『初等数学 第 72 号』(2013 年 9 月)に，鹿児島高専の白坂繁先生が「そうだったのか!!」で，(双曲線を含めて)この導出の便法を紹介している．
その方法は大島商船高専の吉富知行先生が『Basic 数学』(1995 年 5 月号)に「楕円の方程式の標準形は美しくできる！」という小論で発表されたものだという．

その方法とは，$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$ の条件を，$\mathrm{PF}=a-t$，$\mathrm{PF'}=a+t$ と置き換える方法で，実に見事で感動ものである．

■　その「感動」をもとに次のような問題を作り，実力考査に出題した．

> (1)　座標平面上で $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ を焦点とする楕円上の点 P が $\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$ を満たすとき，$\mathrm{PF}=a-t$，$\mathrm{PF'}=a+t$ とおき，さらに $b^2=a^2-c^2$ とおくことによって，楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を導け．
> (2)　同様の工夫をして，$\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ からの距離の差が
> $2a$ である双曲線の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を導け．ただし，
> $b^2=c^2-a^2$ である．

＜解＞　(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおき，PF^2 と $\mathrm{PF'}^2$ をそれぞれ 2 通りに表すと
$(x-c)^2+y^2=a^2-2at+t^2$　…　①
$(x+c)^2+y^2=a^2+2at+t^2$　…　②
① ＋ ②，① － ②　から　$2x^2+2c^2+2y^2=2a^2+2t^2$，$-4cx=-4at$
これらから t を消去すると　$x^2+c^2+y^2=a^2+\left(\dfrac{cx}{a}\right)^2$
よって，$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$　ここで，$a^2-c^2=b^2$
とおけば，$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$　ゆえに，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(2)　$\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ を焦点とする双曲線上の点 P が $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2a$ を満たすとする．このとき，以下複号同順で，$\mathrm{PF}=t\pm a$，$\mathrm{PF'}=t\mp a$ とし，
PF^2 と $\mathrm{PF'}^2$ をそれぞれ 2 通りに表すと
$(x-c)^2+y^2=t^2\pm 2at+a^2$　…　③
$(x+c)^2+y^2=t^2\mp 2at+a^2$　…　④
③ ＋ ④，③ － ④　から　$2x^2+2c^2+2y^2=2a^2+2t^2$，$-4cx=\pm 4at$
これらから t を消去すると　$x^2+c^2+y^2=a^2+\left(\mp\dfrac{cx}{a}\right)^2$
よって，$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$　ここで，$c^2-a^2=b^2$
とおけば，$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2$　ゆえに，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

■　実際に鉛筆を動かして計算してみると，その見事さに感動すること間違いなしである．
この方法が上手く行くのは，条件 $\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$ を $\mathrm{PF}=a-t$，$\mathrm{PF'}=a+t$ と言い換えたことに理由がある．
この意味が楕円(あるいは双曲線の)準線に関係していると，白坂先生は看破している（『初等数学』を参照）．

■　試験の出来はというと，残念ながら良くはなかった．
試験監督をしながら生徒の解答プロセスを見ていると，この問題は，究極，(パラメータ) t を消去するだけなので，それに気づいた生徒は短時間に(1)を解いている．　しかし，$\mathrm{PF}=a-t$，$\mathrm{PF'}=a+t$ とおいたのだから，もう $\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$ の条件は必要ないということに気づいていないものが多く，いつまでも $\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$ の条件をいじっている．
問題文が悪かったのだろうか？

■　教科書もこの方法で方程式を導けばよいのにと思うのだが…．来年度の授業では，是非ともこの方法で方程式を導出しようと思っている．

■　この『雑感』をまとめていて，ほんの先程気がついたことがある．それは，この方法を編み出した吉富知行先生は元同僚である．
40 年も昔のことだが，私が愛知県立高校の教諭になったとき，その 1 年前に同じ高校に新任として赴任された先輩教諭が吉富先生であり，いろいろお世話になった．
どこかで見かけたお名前と思い調べた結果，分かった次第である．今更ながら，世間は狭い．

2014 年 01 月 14 日