雑感　3 乗根を含む値の大小比較

■　2003 年，名古屋大学後期の問題．

(1)　正数 $a,\ b$ に対して，$\dfrac{a^3+b^3}{2}$ と $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ の大小を比較せよ．

(2)　$\sqrt[3]{10}$ と $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+1$ の大小を比較せよ．

(1)については，$y=x^3$ が下に凸であることからすぐ分かる．
問題は(2)である．出題者はもちろん(1)の利用を意図していて，「(1)から得られる $4(a^3+b^3)\geqq(a+b)^3$ において，$a=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}},\ b=1$ とおくと（$a\neq b$ から）$10>\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+1\right)^3$ となり，ここから $\sqrt[3]{10}>\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+1$ となることに気づけ」と言っているのだろう．

■　しかし，実際にはそのことに気づけない受験生もいる．そうなれば，(1)を用いず独立に(2)を考えることになる．
演習で次のような方法を試みた生徒がいるという．

$(\sqrt[3]{10})^3-\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+1\right)^3=\cdots\cdots=\dfrac{3}{4}(10-\sqrt[3]{144}-\sqrt[3]{96})$ となるので，これが正の値であることを想定し，(　)内の 10 を $p+q=10,\ p>\sqrt[3]{144},\ q>\sqrt[3]{96}$ となるような 2 つの正の値 p,q に上手く分割して示そうという試みである（もちろん，負の値なら不等号が逆になるだけ）．
実際には，生徒は $p,\ q$ の値を見つけることに挫折したらしいが，担当教員は $p=5.4,\ q=4.6$ なら O.K. であることを(筆算で)見つけた．
面白い発想ではあるが，見つけるためには単純とは言え，相当な計算が必要である（1 回の予想で上手く行くとは限らないし…）．

■　この話を小耳に挟んだとき，原題の入試問題の詳細を覚えておらず，話題が $10-\sqrt[3]{144}-\sqrt[3]{96}>0$ の部分だったので，この不等式の証明を考えてみた．
そのとき，私の頭に浮かんだのは次の恒等式である．

$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$

さらに，実数 $A,\ B,\ C$ について，

$2(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)=(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2$ から，上の恒等式の（右辺の右因数）$\geqq 0$ という事実である．

したがって，$\boxed{A^3+B^3+C^3-3ABC>0 \Leftrightarrow A+B+C>0}$ である．

これを用いれば，$10-\sqrt[3]{144}-\sqrt[3]{96}>0$ を次のように示すことができる．

$10^3+(-\sqrt[3]{144})^3+(-\sqrt[3]{96})^3-3\cdot10(-\sqrt[3]{144})(-\sqrt[3]{96})=750-30\sqrt[3]{144\cdot96}$

$=30(\sqrt[3]{25^3}-\sqrt[3]{144\cdot96})=30(\sqrt[3]{15625}-\sqrt[3]{13824})>0$．

「3 乗の差」でなく，原題の値で計算した方が格段に易しい．

$(\sqrt[3]{10})^3+\left(-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right)^3+(-1)^3-3\cdot\sqrt[3]{10}\cdot\left(-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right)(-1)=10-\dfrac{3}{2}-1-3\sqrt[3]{15}$

$=\dfrac{15}{2}-3\sqrt[3]{15}\ =\dfrac{3}{2}(5-2\sqrt[3]{15})=\dfrac{3}{2}(\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{120})>0$．

なお，これは $\sqrt[3]{p}$ と $\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{r}$ の大小比較に常に使える方法である．
ちなみに，$p,\ q,\ r$ は負の数でも O.K.である．

■　同様の問題は，(1)の $a,\ b$ に適当な値を代入すればいくらでも作れるわけだが，上の計算の逆を辿る形での問題作成も可能で，$\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{24}>0$ を手がかりにすると

$\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{24}=\dfrac{1}{3}(9-3\sqrt[3]{24})=\dfrac{1}{3}(12-2-1-3\sqrt[3]{12\cdot(-2)\cdot(-1)})$

$=\dfrac{1}{3}\{(\sqrt[3]{12})^3+(-\sqrt[3]{2})^3+(-1)^3-3\sqrt[3]{12\cdot(-2)\cdot(-1)}\}$

から，$\sqrt[3]{12}>\sqrt[3]{2}+1$（なお，$\sqrt[3]{12}\approx2.28942$ ，$\sqrt[3]{2}+1\approx2.25992$ ）．
また，「逆向き」の不等式も

$0>\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{68}=\dfrac{1}{3}(12-3\sqrt[3]{68})=\dfrac{1}{3}(17-4-1-3\sqrt[3]{17\cdot(-4)\cdot(-1)})$

$=\dfrac{1}{3}\{(\sqrt[3]{17})^3+(-\sqrt[3]{4})^3+(-1)^3-3\sqrt[3]{17\cdot(-4)\cdot(-1)}\}$

から，$\sqrt[3]{17}<\sqrt[3]{4}+1$（なお，$\sqrt[3]{17}\approx2.57128$ ，$\sqrt[3]{4}+1\approx2.58740$ ）のように作成可能である．
作成にあたっては，いずれも少し試行錯誤が必要ではある．

2017 年 10 月 01 日