雑感　微分可能性

■　この間まで教えていたT君が，数学Ⅲの教科書をかかえてやってきた．

T：先生，この関数の $x=0$ における微分可能かどうかの判断は，どうすれば良いんですか？

私：どれ，$y=|x|\sqrt{x+1}$ ですか．えーと，場合分けして

$$y=\begin{cases} x\sqrt{x+1} & (x\geqq 0\text{ のとき}) \\ -x\sqrt{x+1} & (x<0\text{ のとき})\end{cases}$$ はいいよね．

さらに，$$y'=\begin{cases} \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} & (x>0\text{ のとき}) \\ -\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} & (x<0\text{ のとき})\end{cases}$$ もいいだろ．

T：はい，いいです．

私：そこでね，$x\to 0$ のときの y' の極限を調べてみるよ．すると，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y'=\lim_{x\to+0}\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}y'=\lim_{x\to-0}\left(-\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}\right)=-1$

となるだろ．で，$y'\big|_{x=0}$ はグラフ上で，何を表すんだっけ？

T：$x=0$ における接線の傾きですよね．

私：そうだね．$x=0$ のとき $y=0$ だから，グラフは原点Oを通るんだけど，そこにおける接線の傾きが，$x>0$ の部分では1，$x<0$ の部分では -1 となって，異なるんだね．

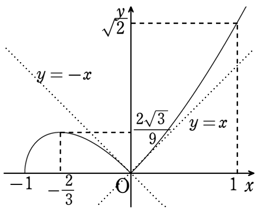
T：なるほど．で，グラフはどんな形なんですか？

私：増減とかもっときちんと調べる必要があるけど，教科書の増減表を参考にするよ．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	/	$+$
y	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

更に，グラフが点 $(1,\ \sqrt{2})$ を通ることなども考慮に入れて，グラフは右のようになるね．

そういえば，教科書にグラフが描いてないもんなあ．



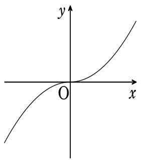
T：で，どうして $x=0$ で微分可能じゃないんですか？

私：関数 $f(x)$ が $x=0$ 微分可能というのは，$f'(0)$ が存在することだったよね．でも，この関数では $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)\neq\lim_{x\to-0}f'(x)$ だから，$f'(0)$ が存在しないだろ．だから，$x=0$ で微分可能じゃないんだ．グラフは $x=0$ のところで尖っているだろ．

T：そう言えば，微分可能だとグラフが滑らかなんでしたね．そうすると，このように絶対値を場合分けするときは，その分けるところで微分可能でないと思えば良いんですか？

私：いや，必ずしもそうじゃないかも知れないなあ．例えば $x=0$ で場合分けしてグラフを描いたとき，こんなふうに滑らかに繋がるようであれば，微分可能なことだってありうるよ．

T：ということは，絶対値を場合分けするときは，その分けるところで微分可能でないかもしれないと思って調べるということですか？



私：そうだね．それがいいだろうね．

T：ありがとうございました．

■　生徒の質問は，いつも前触れもなく突然で，十分適切に答えられないこともあるし，後でこう説明すれば良かったと反省することもある．例えば今回は，$x=0$ で場合分けしてグラフを描いたとき，滑らかに繋がる微分可能な関数の例として，$y=|x|x$ を挙げてやれば良かったなあなどと反省しきりだ．

■　この質問を元にして，問題ができた．

> $g(x)$ を微分可能な関数とし，$f(x)=|x|g(x)$ とする．$f(x)$ が $x=0$ で微分可能となる必要十分条件を求めよ．