雑感　文系のための分数関数の最大・最小

■　$\dfrac{1\text{次式}}{1\text{次式}}$ といった基本的な分数関数が数学Ⅰを離れて数学Ⅲに配置されて久しい．したがって，「反比例」のグラフを知りながら，ほとんどの「文系」の生徒がこの基本的な分数関数のグラフをかけないのは仕方がない．

　したがって，図形問題などでこのタイプの関数の最大・最小を論ずるときには，分子を定数にして，分母の値の範囲から話をすることになる．でも，これはこれでよかろう．

■　しかし，分母または分子が 2 次式の場合はそれでは済まないから，良くある方法としては次の 2 つがある．

①　相加平均≧相乗平均を用いる

②　実数条件から，判別式≧0 を用いる

　例示の必要はなかろうが，例えば次のようである．

(1)　$x \geqq 0$ のとき，

$x+\dfrac{4}{x+1}=(x+1)+\dfrac{4}{x+1}-1 \geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{4}{x+1}}-1=4-1=3$ で，等号が $x+1=2$ すなわち $x=1$ のときより， $x=1$ で最小値 3.

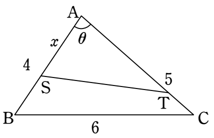
(2)　$y=\dfrac{x}{x^2+1}$ のとき， $yx^2-x+y=0$ で， $y=0$ のとき $x=0$．

$y \neq 0$ のとき，判別式 $D=1-4y^2 \geqq 0$ から $-\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq \dfrac{1}{2}$ となり，

$y=0$ の場合と併せて $-\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq \dfrac{1}{2}$ より，最大値 $\dfrac{1}{2}$， 最小値 $-\dfrac{1}{2}$．

■　さて，先頃次のような出題があった．同志社大学の社会学部での出題であるから，「文系」である．

> △ABCにおいて，AB=4，BC=6，AC=5とする．2点S，Tはそれぞれ辺AB上と辺AC上にあり，△ASTと△ABCの面積比が1：2である．また，線分ASの長さをxとおく．このとき，次の問いに答えよ．　　　　〔2015　同志社大〕
>
> (1)　∠BAC=θとおく．このとき，$\cos\theta$を求めよ．
>
> (2)　線分STの長さをxで表せ．
>
> (3)　線分STの長さの最小値を求めよ．また，そのときのxの値を求めよ．
>
> (4)　線分STの長さの最大値を求めよ．また，そのときのxの値を求めよ．



　よく見かける定番の問題で，過去にも多くの類題の出題がある．

　$2 \leqq x \leqq 4$ であり， $\mathrm{ST}^2=x^2+\dfrac{100}{x^2}-\dfrac{5}{2}$ であって，(3)の最小値は①の手法で一気である．

　ところが，(4)をどうするかではたと困った．理系ならば微分して増減表を書いて速攻である(もちろん $x^2=X$ とおくだろう)．しかし，文系はそうはいかない．

■　そこで $x^2=X$ とおいて， $k=X+\dfrac{100}{X}-\dfrac{5}{2}$ とおき，分母を払って $X^2-\left(k+\dfrac{5}{2}\right)X+100=0$ が， $4 \leqq X \leqq 16$ に実数解を持つ条件を調べる方法を考えたが，なかなか面倒である．

　予備校はどうしているのかと，web サイトを覗いてみると，河合塾，東進予備校はこの方法である．代ゼミは

（３）　$f(x)=x^2+\dfrac{100}{x^2}-\dfrac{5}{2}$ とすると

$$f(x)=\left(x-\frac{10}{x}\right)^2+\frac{35}{2}\cdots\cdots④$$

④は $x=\dfrac{10}{x}$(かつ③)，つまり $x=\sqrt{10}$ のときに最小値 $\dfrac{35}{2}$ をとる．よって $x=\sqrt{10}$……(答) のときに ST の長さの最小値は $\sqrt{\dfrac{35}{2}}$……(答)

（４）　④から，$f(x)$ は $\left|x-\dfrac{10}{x}\right|$ が最大となるときに最大値をとる．$x+\left(-\dfrac{10}{x}\right)$ は③の範囲においては増加するので，$\left|x-\dfrac{10}{x}\right|$ は③の範囲では $x=2$ または $x=4$ で最大となる．

$f(2)=\dfrac{53}{2}$，$f(4)=\dfrac{79}{4}$ より $f(2)>f(4)$ であるから最大値は $f(2)$ である．よって $x=2$……(答) のときに ST の長さの最大値は $\sqrt{\dfrac{53}{2}}$……(答)

としていて，苦労の跡が忍ばれる．とは言え，―――― は技巧的(?)である．

■　そこで，私が考えた方法は（ずるいように思われるかも知れないが）次の方法である．

> $f(x)=x^2+\dfrac{100}{x^2}-\dfrac{5}{2}$について，$2 \leqq x \leqq 4$　における最大値を考えればよい．
>
> $f(2)=4+\dfrac{100}{4}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{53}{2}$，$f(4)=16+\dfrac{100}{16}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{79}{4}$ で $f(2)>f(4)$．
>
> $f(2)-f(x)=4+\dfrac{100}{4}-x^2-\dfrac{100}{x^2}=\dfrac{-x^4+29x^2-100}{x^2}=\dfrac{-(x^2-4)(x^2-25)}{x^2}$．
>
> ここで，$2 \leqq x \leqq 4$ から $4 \leqq x^2 \leqq 16$ より $x^2-4 \geqq 0$，$x^2-25 \leqq 0$ であるから，$2 \leqq x \leqq 4$ において，$f(2)-f(x) \geqq 0$ となって，$f(2) \geqq f(x)$ となる．したがって，$f(x)$ の最大値は $f(2)=\dfrac{53}{2}$ である．
>
> したがって，AS は $x=2$ のとき，最大値 $\sqrt{\dfrac{53}{2}}=\dfrac{\sqrt{106}}{2}$ をとる．

　唐突の感もあるし，これも技巧的と言えなくないが，次のようなタイプの分数関数に一般化しても使える手法である．

■　分数関数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ （ $\deg f(x) \leqq 2$， $\deg g(x) \leqq 2$ ）は（必要に応じて微分法を用いて）非常にきれいに分類される（→拙著『問題づくりの道具箱』p.144-145）．

　文系の問題でこのタイプの分数関数の最大・最小が問題とされ，①，②の手法が効かない場合を考えてみると，定義域が閉区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ で，この区間では $y=h(x)$ グラフが「繋がっている」場合であろう．

　その場合，関数が単調でないとすれば，極値は②の判別式 $D \geqq 0$ から得られる y の範囲から求められる．

　それで求まらない最大または最小があるとしたら，定義域の端点 $x=\alpha,\ \beta$ で最大または最小になるに決まっている．それが $x=\alpha$ か $x=\beta$ かは， $h(\alpha)$， $h(\beta)$ の値から判断できるが，それが最大または最小であることを示しておかなければならないのは言うまでもない．しかし，それは難しくない．

■　$h(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ の $\alpha \leqq x \leqq \beta$ における増減を調べる．ただし，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ は $px^2+qx+r>0$ を満たすとする(これで，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ で $h(x)$ はグラフが「繋がっている」ことになる)．

　このとき， $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$ を満たす γ に対して

$h(x)-h(\gamma)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}-\dfrac{a\gamma^2+b\gamma+c}{p\gamma^2+q\gamma+r}$ を通分すれば，

分母は $(px^2+qx+r)(p\gamma^2+q\gamma+r)>0$ であり，

分子は x の 2 次式であって，因数 $x-\gamma$ を持つことから

$(x-\gamma)(sx-t)$ の形に因数分解できる．この式の $\alpha \leqq x \leqq \beta$ における符号を調べればよい．

　γ は $D=0$ とする x の値と，区間の両端 $\alpha,\ \beta$ が候補である．

■　例を挙げる．

　$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3x}$ の $2 \leqq x \leqq 4\cdots(*)$　における最大・最小．

$y=\dfrac{x-1}{x^2+3x}$ とおくと，$yx^2+(3y-1)x+1=0$ で，$y=0$ のとき $x=1$ となり，(*)を満たさない． $y \neq 0$ のとき，判別式

$D=(3y-1)^2-4y=(9y-1)(y-1) \geqq 0$ から， $y \leqq \dfrac{1}{9}$，$1 \leqq y$．ここで，

等号は $x=-\dfrac{3y-1}{2y}$ のとき成り立つ． $y=\dfrac{1}{9}$ のとき $x=3$ で(*)を満たし， $y=1$ のとき $x=-1$ で(*)を満たさない．

$f(3)-f(x)=\dfrac{1}{9}-\dfrac{x-1}{x^2+3x}=\dfrac{(x-3)^2}{9x(x+3)} \geqq 0$ （∵(*)），

$f(2)=\dfrac{1}{10}$，$f(4)=\dfrac{3}{28}$ から $f(2)<f(4)$ で，

$f(2)-f(x)=\dfrac{1}{10}-\dfrac{x-1}{x^2+3x}=\dfrac{(x-2)(x-5)}{10x(x+3)} \leqq 0$ （∵(*)）．

よって， $f(2) \leqq f(x) \leqq f(3)$ から

最大値 $f(3)=\dfrac{1}{9}$， 最小値 $f(2)=\dfrac{1}{10}$．

■　理系の生徒にとっては何でもないような問題であっても，文系の手法では手強い問題だ．

2015 年 3 月 02 日