雑感　求まらない厳密値・求まる厳密値

■　ネタ探しは，相変わらず知恵袋から．
　知恵袋には，ある値を求めたいという質問が少なくないが，その厳密値が求まらないものも結構あるし，求まっても複雑極まりないのもある．

■　$x=2\cos\theta+2\theta\sin\theta$，　$y=\sin\theta-\theta\cos\theta$で表されるとき，θ=π/4〜π での移動距離 L を教えてください．　長さの公式を使ったのですが，途中で詰まってしまいます．

　$x=2\cos\theta+2\theta\sin\theta$，　$y=\sin\theta-\theta\cos\theta$ の式が正しいとすれば

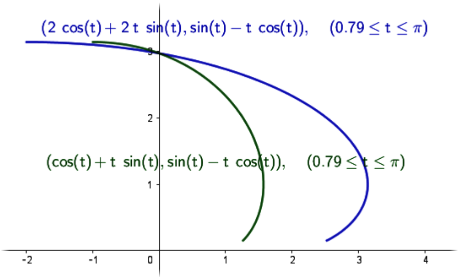
$L=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}\,d\theta$　　であり，厳密値は求まらないのではないか．

参照：
https://ja.wolframalpha.com/input/?i=integrate+t*sqrt%281%2B3*cos%5E2%28t%29%29+dt+t%3DPi%2F4+to+Pi

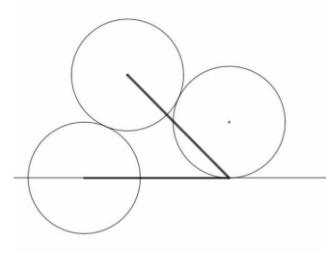
これを，x 軸方向へ 1/2 倍した$x=\cos\theta+\theta\sin\theta$，$y=\sin\theta-\theta\cos\theta$　であれば

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\theta d\theta=\frac{15}{32}\pi^2$

となるが，［面積ならともかく]弧長がこの 2 倍になったりする訳ではない．
　恐らく上に書いたように，弧長計算できる曲線を，x 軸方向へ 2 倍拡大して，弧長も 2 倍になると勘違いした出題ミスであろう．



■　円 A と B, 円 B と C がそれぞれ接する半径 r の 3 つの円 A, B, C について考える．円 A の中心から円 B と交わらずに円 C に接する点を p とし，円 A の中心と p，円 B の中心と p の長さがどちらも x である．
このとき，x の長さを r を用いて表せ．
ちなみに多元多次を電卓に解かせると 2.58629062012r と近似するようです．

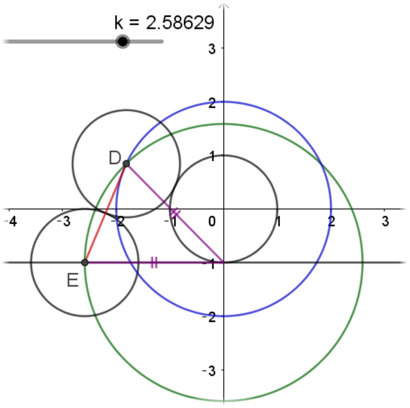


■　$r=1$として良い．　また，その線分の長さ x を k として，下図のような座標平面で考える．　D は 2 円$x^2+y^2=2^2$（青）,$x^2+(y+1)^2=k^2$（緑）の交点で，連立方程式を解くとD$(-\sqrt{-k^4+10k^2-9}/2,(k^2-5)/2)$となる．
E(-k, -1)なので DE=2 となる k を求めると，
$(\sqrt{-k^4+10k^2-9}/2+k)^2+((k^2-5)/2+1)^2=4$ から
$2\ k^2-2\ =k\sqrt{-k^4+10k^2-9}$　となり，両辺を平方して整頓すると
$k^6-6k^4-7k^2+16=0$ となる．
ここで，　$k^2=j$とおくと$j^3-6j^2-7j+16=0$　...#
この方程式を解き，　k>2 より j>4 となるものを求めると
$j=2+(2\sqrt{57}\sin(\tan^{-1}(21\sqrt{1038}/1384))/3+\pi/3)\,/3$ ≒6.6889．これより
$k=\sqrt{2+(2\sqrt{57}\sin(\tan^{-1}(21\sqrt{1038}/1384))/3+\pi/3)\,/3}$
=2.586290620121738666... となり，求まった．
質問者の近似値とも近似値が一致する．

なお，#をカルダノの公式で解き，厳密解を求めると

$$j=2+\frac{\sqrt[3]{63+4i\sqrt{1038}}}{3^{2/3}}+\frac{19}{\sqrt[3]{3(63+4i\sqrt{1038})}}$$

となり，虚数単位 i を用いて表される実数解[還元不能のタイプ]になり，扱いに困る．そこで，三角関数を用いた，ビエトの解を採用すれば無事解決したのであった．



2021 年 04 月 01 日