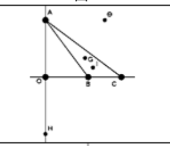
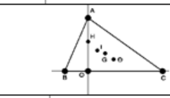
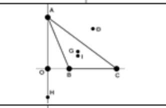
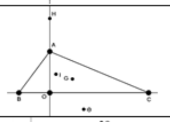
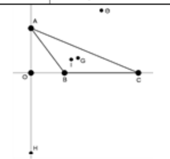
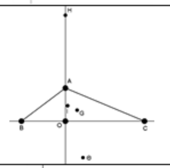
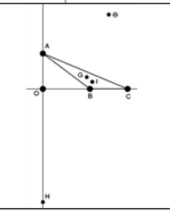
雑感　５心がすべて格子点の三角形

■　鹿児島高専の白坂繁先生発行の「高数研」案内と報告・通算 187 号（2017 年 2 月 7 日発行）の宿題〔1〕に次があった．

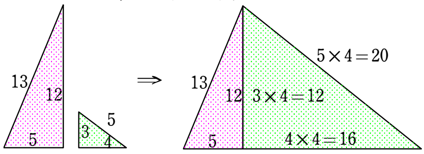
3 点 A (0，288)，B (–120，0)，C (216，0) を頂点とする三角形がある．この三角形の重心 G，垂心 H，外心 Θ，内心 I の座標を求めよ．（白坂創作問題．普通の問題ですが…．もっと小さいのができませんかね？）

■　彼がこの問題を取り上げた意図は（　）内のコメントにあり，格子点を頂点に持つ三角形で，その重心，垂心，外心，内心すべてが格子点になるできるだけ小さい三角形が欲しいということである．

■　これに答えて，具体例を表にした 1 つのレポートを彼に送った．
見づらいことを承知の上で，表を下に載せた．

	A	B	C	図	重心 G	垂心 H	外心Θ	内心 I	傍心 I_A，I_B，I_C
1	(0, 72)	(54, 0)	(96, 0)		(50, 24)	(0, -72)	(75, 72)	(60, 12)	(90,-18) (180,252) (-30,42)
2	(0, 72)	(-30, 0)	(96, 0)		(22, 24)	(0, 40)	(33, 16)	(12, 28)	(54,-126) (132,108) (-66,54)
3	(0, 72)	(30, 0)	(96, 0)		(42, 24)	(0,-40)	(63, 56)	(42, 18)	(84,-36) (162,198) (-36,44)
4	(0, 120)	(-90, 0)	(288, 0)		(66,40)	(0,216)	(99,-48)	(18,54)	(180,-540) (330,210) (-132,84)
5	(0, 120)	(90, 0)	(288, 0)		(126,40)	(0,-216)	(189,168)	(108,36)	(270,-90) (420,660) (-42,66)
6	(0, 90)	(-120,0)	(216,0)		(32, 30)	(0,288)	(48,-99)	(6, 42)	(90,-630) (240,120) (-144,72)
7	(0, 90)	(120,0)	(216,0)		(112, 30)	(0,-288)	(168,189)	(126,18)	(210,-30) (360,720) (-24,48)

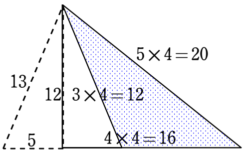
■　上表の 2 と 3 の三角形について，作り方を述べる．
次の左の 2 つのピタゴラス三角形を用意し,「高さ」を揃えて繋ぎ，右の三角形を作る．この出来上がった三角形は 3 辺が整数で面積も整数（設定によっては，整数の半分のこともありうる）である．



これで 5 心の座標を計算すると，分母に 3（重心，内心において），2（外心において）をもつ有理数の座標が得られるので，全体を 6 倍して，上の 2 の三角形が得られる．

また，この三角形で左部分を折り返して，取り除くと（右図の青網点）の三角形が得られ，これも全体を 6 倍して 3 の三角形が得られる．

これらについて，3 つずつある傍心も格子点になっている．



■　なお，いかにも真面目に 5 心の座標を計算したかのように書いたが，実は GeoGebra に表示される座標を利用している．

2017 年 06 月 16 日