雑感　位置ベクトルが分からない（その 1）

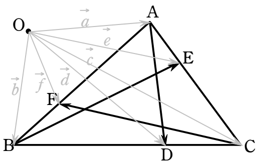
■　ベクトルで生徒が「分からない」と感じる内容は「位置ベクトル」と「ベクトル方程式」であり，ベクトルの重要部分である．ここでは，位置ベクトルについて触れよう．

■　教科書では，位置ベクトルの定義の後に，分点の位置ベクトルと，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$ の関係が述べられる．その後，「位置ベクトルを用いた図形の性質の証明」や，「3 点が 1 直線上にあることの証明」，「交点の位置ベクトルを求める問題」などへとつながっていく．

■　位置ベクトルを用いた図形の性質の証明で言えば，次のような問題が，次のような証明とともに現れる．

【1】△ABC の辺 BC，CA，AB を 2 : 1 に内分する点を，それぞれ D，E，F とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ．

＜証明＞　A，B，C，D，E，F の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ とする．



$\vec{d}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$，$\vec{e}=\dfrac{\vec{c}+2\vec{a}}{3}$，

$\vec{f}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=(\vec{d}-\vec{a})+(\vec{e}-\vec{b})+(\vec{f}-\vec{c})$

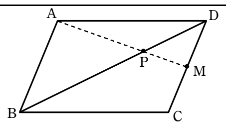
$=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}-\vec{a}+\dfrac{\vec{c}+2\vec{a}}{3}-\vec{b}+\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}-\vec{c}=\vec{0}$　（終）

　図では $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ を薄い色で書き込んでおいたが，機械的な処理で済むこの問題では，かえって邪魔である．

■　この問題では位置ベクトルの基準点（始点）を頂点の 1 つにとって証明を行うことも可能である．しかも，この内容に続く，3 点が 1 直線上にあることの証明，交点の位置ベクトルを求める問題などでは，与えられた図形（三角形など）の頂点をその基準点にとって，2 つのベクトルで処理するのが一般的である．
　そのため，私は授業では上の問題の証明を 2 通りの方法（基準点を O とする証明と，A とする証明）で指導している．
　しかし，生徒の「位置ベクトルが分からない」という原因の 1 つが，この 2 つのどちらの方法で処理したらいいか分からないという点にあるように思われる．

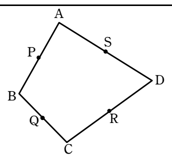
■　そもそも平面のベクトルを扱うならば，1 次独立な 2 つのベクトルだけで処理できるはずだから，与えられた図形(三角形など)の頂点をその基準点にとって，2 つのベクトルで処理するという方針で貫くという方法がないわけではない．
　実際，平行四辺形が扱われる次の【2】のような問題でも，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で処理するのが普通だ．

【2】平行四辺形 ABCD の対角線 BD を 2 : 1 に内分する点を P，辺 CD の中点を M とするとき，3 点 A，P，M が 1 直線上にあることを証明せよ．



　しかし，例えば次のような問題では，2 つのベクトルでは混乱を来しかねない．

【3】四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とするとき，2 つの線分 PR，QS の中点が一致することを示せ．



※この項，http://www10.plala.or.jp/mondai/columun/itivector_2.pdf へ続く．