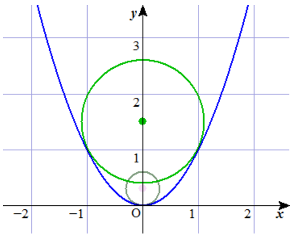
雑感　あえて次数の高い方を選択する

■　2009 年慶応大学経済学部の問題．

k は 0 でない実数とする．座標平面上で，不等式 $x^2+y^2<k^2$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を A，不等式 $y \geqq \frac{1}{2}x^2-2k$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を B とする．
(1)　$A \cap B=\phi$ となるような k の値の範囲を求めよ．
(2)　$A \subset B$ となるような k の値の範囲を求めよ．

■　内容的には目新しいものではなく，例えば，「$y=x^2$ 上の点 P と y 軸上の点 A$(0,\ a)$ との距離が最小値となる点 P はどこか」といった形で問われることが多い．

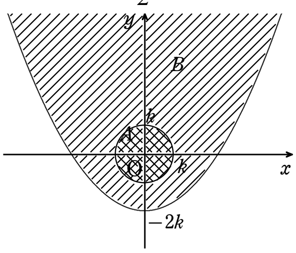


a の値がある値より小さい場合には頂点で最小になるといった場合分けが必要になる．

この慶応大の問題は円と放物線の両方が k の値に対応して変わるといったことが，やや目新しいか．

■　さて，この慶応大の問題だが，(1)は容易に $k>0$ であることがわかるので，ここでは(2)の話であって，(2)でもこの $k>0$ であることが必要である．

■　図のように円 $x^2+y^2=k^2$ と放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-2k$ が共有点を持たないか，接する場合が求める条件である．



■　x を消去した y の 2 次方程式 $y^2+2y+4k-k^2=0 \cdots①$ が「異なる 2 つの実数解」を持つことはない条件から，判別式 $D<0$ として

$D/4=1-(4k-k^2) \leqq 0$ と $k>0$ より，

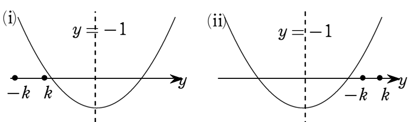
$2-\sqrt{3} \leqq k \leqq 2+\sqrt{3} \cdots②$　とすると誤りである．

これは，$y=\frac{1}{2}x^2-2k$ については，x の値を 1 つ定めると y の値が必ず 1 つ定まるのに対して，y の値を 1 つ定めても対応する x の値が定まるためには，$y \geqq -2k$ でなければ x の値が定まらないことを考慮していないからである．
$x^2+y^2=k^2$ については，$x^2=k^2-y^2 \geqq 0$ から，$-k \leqq y \leqq k$ でなければならない．

■　したがって，①が「異なる 2 つの実数解」を持つことがない条件は，$D \leqq 0$ であるか「$D>0$ であって，①の解 y が $y<-2k$ または「$y<-k$ または $k<y$」に存在する場合」である．

したがって，②以外に，$k<2-\sqrt{3}$ または $2+\sqrt{3}<k$ の場合について，①の 2 解 y が $y<-k$ または $k<y$ に存在する場合を考えなければならない．

$f(y)=y^2+2y+4k-k^2$ とすると，$f(k)=6k,\ f(-k)=2k$ で共に正であることを考慮に入れて，(i)のケースは $k<-1$ からあり得ない．(ii)のケースは $-1<-k$ から $k<1$ であるから，$D>0$ より $0<k<2-\sqrt{3}$ である．



したがって，②と併せて答は $0<k \leqq 2+\sqrt{3}$ になる．

■　これを次数が高くなることを覚悟して，x の方程式にすれば，分かり易くなる．

y を消去して，$x^2+\left(\frac{1}{2}x^2-2k\right)^2-k^2=0$ から

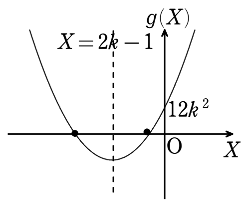
$x^4+4(1-2k)x^2+12k^2=0$　において，$x^2=X$ とおけば

$X^2+4(1-2k)X+12k^2=0 \cdots③$　で，$X \geqq 0$ であるから求める条件は，③が「$X \geqq 0$ を満たす解 X を持たない」条件になる．判別式から $D/4=4(1-2k)^2-12k^2 \leqq 0$ より

$2-\sqrt{3} \leqq k \leqq 2+\sqrt{3}$ のときは③は異なる 2 つの実数解は持たないから，条件を満たす．

$D>0$ のときであっても，「$X \geqq 0$ を満たす解 X を持たない」のは，$g(X)=X^2+4(1-2k)X+12k^2$ とおけば，

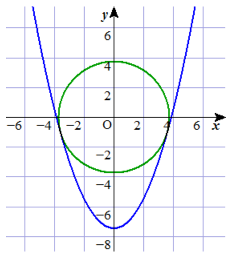
$g(0)=12k^2>0$ であるから，軸 $X=2k-1<0$ のときは 2 解とも負であるから，$0<k<\frac{1}{2}$．



$k<2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}<k$ かつ $0<k<\frac{1}{2}$ から $0<k<2-\sqrt{3}$ は条件を満たす．

以上から，求める条件は
$0<k \leqq 2+\sqrt{3}$ である．

ちなみに，$k=2+\sqrt{3}$ の場合の円と放物線の関係は右図の通りである．



■　雑誌『大学への数学』2009 年 7 月号ではこの問題について，

「$y=\frac{1}{2}x^2-2k$ 上の任意の点 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2-2k\right)$ と原点 O との距離が，円の半径 k 以上となる場合である」

として，③と本質的に同じ関係式を導いている．

解法として異論はないが，「共有点を持たない」を方程式の実数解の問題として普通に処理できるのに，あえて別の解法を提起する理由は，①から安易に②を導く誤答の流れを意識してのことだろうか．

なお，この問題への雑誌の評価は C****（発展レベルで目標時間 40 分）であるが，（解法にもよるが）それほどのレベルの問題ではない．

また，数研出版の「入試問題集」などでも同様の解法を示している．