雑感　　対数表の作り方

■　雑誌 Newton　2013 年 8 月号が「『対数』の不思議な世界」を特集している．その中に，ネイピアやブリッグスが 17 世紀初めに，どのような方法で対数の値を計算したのかが載っていて，興味深い．

■　記事は対数のビギナーにも読めるようにしてあり，私どもにはかえって分かりづらい．ポイントを記せば次のようになる．

m を正の整数として，$10^{\frac{1}{m}}=1+a$，$2^{\frac{1}{m}}=1+b$ とおく．ここで，$m\to\infty$ とすると $10^{\frac{1}{m}}\to 1,\ 2^{\frac{1}{m}}\to 1$　となるので，m を十分大きくとれば a, b は，$0<a<1$，$0<b<1$ を満たす．

このとき，$x=\log_{10}2$ とすると $10^x=2$ であるから

$2^{\frac{1}{m}}=(10^x)^{\frac{1}{m}}=(10^{\frac{1}{m}})^x$ より　$1+b=(1+a)^x$ である．

ここで，$a\fallingdotseq 0$ のとき，$(1+a)^x\fallingdotseq 1+ax$　が成り立つから

$1+ax\fallingdotseq 1+b$　より　$x\fallingdotseq\dfrac{b}{a}$　で　$\log_{10}2\fallingdotseq\dfrac{b}{a}$　である．

なお，$1+ax<(1+a)^x=1+b$ であるから，$x<\dfrac{b}{a}$ である．

■　当時，(もちろん筆算での)開平の方法が知られていたという．10 と 2 の開平を(同じだけ)何回も行えば，上記の m の値をどんどん大きくできるので，開平と割り算だけで常用対数の近似値計算ができるというわけである．

■　$\log_{10}2=0.30102999566398119521\cdots$について計算してみよう．

12 位まで表示する電卓を用い（さすがに筆算はつらい），10 と 2 について $\sqrt{\quad}$ キーを 20 回押して，$10^{\frac{1}{2^{20}}}$ と $2^{\frac{1}{2^{20}}}$ の値を求めると，$10^{\frac{1}{2^{20}}}=1.00000219591$，$2^{\frac{1}{2^{20}}}=1.00000066102$ となる．

これから $\log_{10}2\fallingdotseq\dfrac{66102}{219591}=0.3010232659\cdots$ の結果を得る．

$a\fallingdotseq 0$ のとき，$(1+a)^x\fallingdotseq 1+ax$ の近似式を用いるから，これによる誤差も考慮に入れる必要があるが，素晴らしい結果である．

ちなみに Newton の記事では 54 回の開平を行った結果を載せているが，ここで用いた電卓では $10^{\frac{1}{2^{54}}}$ と $2^{\frac{1}{2^{54}}}$ の値は 1 になってしまうので，計算ができなかった．

■　$\sqrt{\quad}$ キーを押す回数をもう少し少なくしてみてもよいが，10 回程度では良い結果が得られない．

値が一致する部分をグリーンのマーカーで塗ってみた．

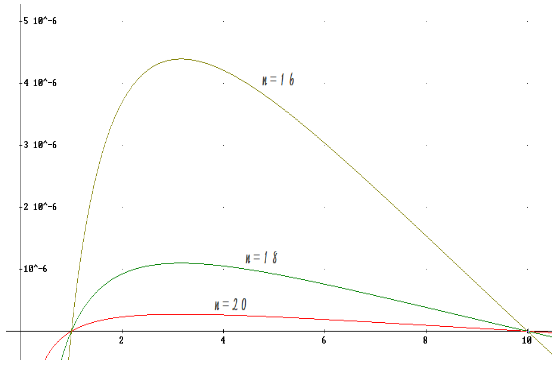
		$\log_{10}2$	$\log_{10}3$	$\log_{10}7$
近似値		0.3010299957	0.4771212547	0.8450980400
√キーの回数	10	0.3007934599	0.4768407703	0.8449508221
	12	0.3009708354	0.4770511362	0.8450612496
	14	0.3010151441	0.4771036704	0.8450888593
	16	0.3010260060	0.4771165839	0.8450955407
	18	0.3010280405	0.4771189817	0.8450960301
	20	0.3010232659	0.4771188254	0.8450938335

n が大きくなるに従って「真」の値に単調増加しながら近づくはずが，$n=20$ になって「減少」してしまうのは，有効数字の桁数が小さくなることが原因かも知れない．実際，$n=25$ とすると，$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3008307826\cdots$となり，精度が落ちてしまう．

したがって，12 桁の電卓では $n=18$ あたりがベストということだろうか．

また，$\log_{10}2$ や $\log_{10}7$ に比べて $\log_{10}3$ の精度の若干の悪さが気になるが，

$y=\log_{10}x-\dfrac{x^{\frac{1}{2^n}}-1}{10^{\frac{1}{2^n}}-1}$ のグラフをかいてみると，$x\fallingdotseq 3$ で極大をとり，$\log_{10}3$ では「誤差」が大きくなっていることがわかる．



このことは，この近似式の特性のようなものかもしれない．

■　なお，手元にある一般的な 8 桁の電卓では

$10^{\frac{1}{2^{20}}}=1.0000020$，$2^{\frac{1}{2^{20}}}=1.0000005$ から $\log_{10}2\fallingdotseq 0.25$ となり，良い結果が得られない．これも有効数字のなせる技であろう．12 回で止めると $\log_{10}2\fallingdotseq 0.30078\cdots$，$\log_{10}3\fallingdotseq 0.47705\cdots$で，微妙である．

教科書に載っている常用対数表が 4 桁であるだけに，4 桁まで正確ならば生徒も「ホーッ」と思ってくれるのだろうが，3 桁ではちょっと物足りない．

もし，8 桁の電卓でそれなりの精度の計算ができたら，授業で取り上げたいんだけどなあ．残念．

■　それにしても，対数表の完成はその後の自然科学（における計算）全般に大いなる貢献をしたわけで，その表作成の手法が分かって，大収穫である．

なお，拙「雑感」に関連する「1　常用した対数」
http://www10.plala.or.jp/mondai/columun/jouyou.pdf
がある．

2012 年 07 月 07 日