

雑感 文字入り問題を作る

■ 文字入りの問題を試験に出題したいということがあがる。ただ、なかなか上手く作れず、試行錯誤を繰り返すことが多い。

今回、文字 a が入った 2 次方程式について、その解が $\sin\theta$, $\cos\theta$ であるとして、 a の値とその解を定める問題（よくある定番の問題だ）を、次のように作った。

■ まず、解を $\frac{3}{5}$ と $\frac{4}{5}$ と定めた。これによって方程式は

$$x^2 - \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right)x + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0 \quad \text{すなわち, } 25x^2 - 35x + 12 = 0 \quad \text{となる.}$$

解を、 $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$ などと設定すると、係数に無理数が含まれるので、煩雑な方程式になってしまう。

■ 次に 2 次方程式 $25x^2 - 35x + 12 = 0$ に対して、 x^2 の係数に文字を入れると、2 次方程式にならない場合分けなどが面倒なので、ここはそのままとし、それ以外に文字を入れることにした。

すなわち、 $25x^2 + bx + c = 0$ として、 b, c を a の式にする。

この問題を解くにあたっては、解と係数の関係から

$$\sin\theta + \cos\theta = -\frac{b}{25}, \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{c}{25} \quad \text{を求め, } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{の関}$$

係から文字の値を定めていく。したがって、 $\left(-\frac{b}{25}\right)^2 - \frac{2c}{25} = 1$ を解くことになる。

$a = 7$ として、 $b = -35 = -5a$ と 5 の倍数にした。こうすると、2 解の和の分母が 5 となって、簡単になるからである。

次に定数 12 を a の式で表す。 $2a - 2$ などの 1 次式にしてもよいが、ここではもう少し複雑にして、 $12 = 7^2 - 6 \cdot 7 + 5 = a^2 - 6a + 5$ という 2 次式にしてみた。

これによって、方程式は $25x^2 - 5ax + a^2 - 6a + 5 = 0$ となった。

■ この方程式で問題を解いていけば、少なくとも $a = 7$, 2 解が $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ という答が得られるはずである（もちろん、他の解もありうる）。

$$\text{実際に解いてみると, } \sin\theta + \cos\theta = \frac{a}{5}, \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{a^2 - 6a + 5}{25}$$

$$\text{となり, } \sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{a}{5}\right)^2 - \frac{2(a^2 - 6a + 5)}{25} = 1 \quad \text{から}$$

$$a^2 - 12a + 35 = 0 \quad \text{となり, } a = 5, 7 \quad \text{となる.}$$

$$a = 5 \quad \text{のとき 2 解は和が 1, 積が 0 から 0 と 1}$$

$$a = 7 \quad \text{のとき 2 解は和が } \frac{7}{5}, \quad \text{積が } \frac{12}{25} \quad \text{から } \frac{3}{5} \text{ と } \frac{4}{5} \quad \text{となった.}$$

■ ここで得られた 2 組の答のうち、1 組を条件で排除するために、 θ に条件を付けたい。さらに、 $\sin\theta, \cos\theta$ の値も確定するために、 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とした。こうすることによって、 $a = 7$ の場

合に限定され、 $\sin\theta > \cos\theta$ から、 $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}$ と確定できた。

■ ここでできた問題は次の通り。

x の 2 次方程式 $25x^2 - 5ax + a^2 - 6a + 5 = 0$ の 2 解が $\sin\theta$ と $\cos\theta$ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$) であるとき、定数 a の値と、 $\sin\theta, \cos\theta$ の値を求めよ。