雑感　三角形の内心の座標

■　座標平面上の三角形について，その内心の座標を求めることは一般に容易でない．そのために，どのような三角形ならば内心の座標が「きれいに」求められるかについて，拙著『問題作りの道具箱』の中にいくつかの例示をした．

■　2 年生の補習で，内心の座標を求める問題を扱った．問題は以下の通りである．

> 3 直線 $l_1 : y=8x$， $l_2 : 4x=7y$， $l_3 : 7x+4y=39$ によってできる三角形がある．
> (1)　この三角形の内部の領域を，連立不等式で表せ．
> (2)　この三角形の内心 I の座標と，内接円の半径 r を求めよ．

取り扱いの意図としては，I$(a,\ b)$ として，

$$r=\frac{|8a-b|}{\sqrt{8^2+1^2}}=\frac{|4a-7b|}{\sqrt{4^2+7^2}}=\frac{|7a+4b-39|}{\sqrt{7^2+4^2}}\quad\cdots\quad①$$

から求めるにあたり，分子の絶対値記号を(1)の不等式条件から外して，簡潔にさせるということにある．

$8a-b>0,\ 4a-7b<0,\ 7a+4b-39<0$　から，

$8a-b=7b-4a=39-7a-4b$　という連立方程式を解けば，I の座標が求まる．

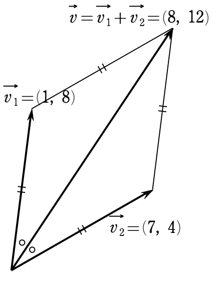
もちろん, 問題の設定としては，$8^2+1^2=7^2+4^2$ であるから，分母が同じになって計算がやりやすいと言うことを考慮に入れて，作問されている．

■　①の式ができても，(1)がなかなかヒントとして機能せず，生徒によっては

$$|8a-b|^2=|4a-7b|^2=|7a+4b-39|^2$$

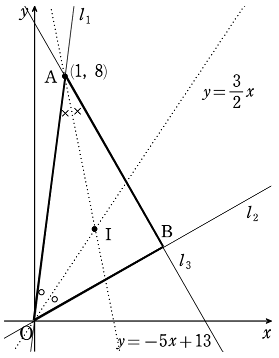
と次数を上げてしまう者も現れる．このようにして解けないわけではないが，面倒な計算になってしまう．

■　次のような方法もある．$l_1,\ l_2,\ l_3$ の方向ベクトルとして，$\vec{v_1}=(1,\ 8)$，$\vec{v_2}=(7,\ 4)$，$\vec{v_3}=(4,\ -7)$ をとると，これらの 3 つのベクトルは大きさが等しい．



したがって，たとえば右図のように $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$ をとると，$\vec{v}$ は $l_1,\ l_2$ のなす角を 2 等分する方向になるから，この直線の傾きが $\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$ である．

こういったことを用いれば，内心 I は図の∠AOB の 2 等分線 $y=\dfrac{3}{2}x$ と∠OAB の 2 等分線 $y=-5x+13$ の交点として I$(2,\ 3)$ と求まる．



■　加法定理を用いる方法もある．

∠AOB$=2\theta$ とすると，

$\cos 2\theta=\dfrac{7+32}{65}=\dfrac{3}{5}$ で，

$2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{5}$ より $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となり，$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ である．∠xOB$=\alpha$ とすれば∠AOB の 2 等分線の傾きは $\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{\tan\alpha\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}=\dfrac{4/7+1/2}{1-4/7\cdot 1/2}=\dfrac{3}{2}$ である．

しかし，AI の傾きはこの方法では苦しい．