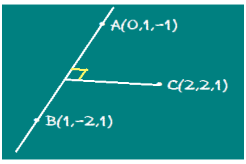
雑感　原点の位置



■　座標が関係した図形問題を考えるとき，図を描くにあたって座標軸を描いてから点などをとっていくこともあるが，座標軸を描かずに，半ばいい加減に幾つかの点をとっていくことがある．

　特に，空間図形の問題の場合はそういったことが多く，そのような板書をすると，「え？ そんないい加減な図で良いの？」と不安そうな顔をする生徒が出てくる．

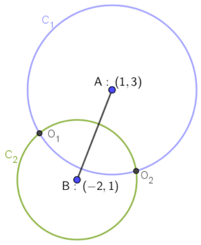
　「まぁ，見る方向を考えたら，こんな風に見えることがあるから，この程度のいい加減な設定で，ちょうど好い加減なんだよ」などとうそぶきつつ煙に巻いて授業を進める．

■　しかし，本当に見る方向によってこれに近い状態に見えることがあるのだろうか．あるとしたら，この場合，原点 O はどこにあり，座標軸はどの方向へ走っているのだろうか？

■　まず 2 次元で考えてみる．

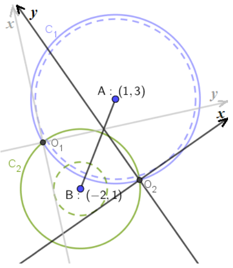
　平面上に適当に 2 点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ をとったとき，座標平面的に O はどこにあるのだろうか．

　このとき A を中心とした半径 $\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$ の円 C_1 と，B を中心とした半径 $\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}$ の円 C_2 を描いたとき，それらの交点が原点 O のはずである．けれども，円を描くとき，単位の長さ 1 が分からなければ円を描くことはできない．したがって線分 AB の長さ $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$ が長さの基準になる．



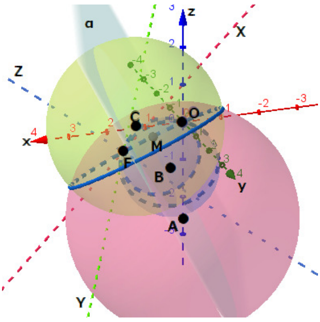
　例えば，右図で $\mathrm{AB}=\sqrt{13}$ であるから，そこから 1 の長さを割り出して，半径 $\sqrt{10}$ の円 C_1 と半径 $\sqrt{5}$ の円 C_2 を描き 2 円の交点を求める．

　図でも分かるように，一般にこれらの交点は 2 つ存在する．そのどちらが正しい O なのかという新たな問題が生じる．



　この例の場合，A，B の x 座標が異符号なので，線分 AB と y 軸が交わる．y 軸の左に B，右に A があるので，O$_2$ が正しい原点 O であることになる．x 軸は A から 3，B から 1 の距離にある直線なので，図の破線のような円を描き，O$_2$ からこれらの円に引いた接線がそれである．

　では，O$_1$ が原点だとするとどうなのかというと，図のグレイのように x 軸の左方向が正になり，正しい座標軸の直線 AB に関する鏡像になっている．



■　空間における場合，座標が分かっている 3 点 A，B，C があるとき，O の位置を求めるには，A，B，C を中心とし，それぞれ半径が OA，OB，OC の長さの球面を描き，その 3 つの球面の交点（一般に，図の O と F のように 2 つある）の 1 つが O である．

　この O と F は平面 ABC：α に関して対称な位置にあり，図では分かりづらいが，O を原点とする座標軸 Ox，Oy，Oz と F を原点とする座標軸 FX，FY，FZ は平面 α の鏡像になっていて，片方が右手系，他方が左手系になっている．

■　このように書くと，最初の図でも O の位置を作図できそうだが，空間を平面に描いてしまっているため，作図が可能かどうかは「？」である．それは，例えば次のような問題が生じるからである．

　A を中心として，半径 $\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ の球面を描くにしても，1 の長さはこの図から求めることができるのだろうか．$\mathrm{AB}=\sqrt{14}$ を基準にした 1 の長さと，AC=3 を基準とした 1 の長さが違ってくるだろうし…．O が決まらなければ，座標軸は決めようがない．

　射影幾何学か何かを学べば解決することがらなのだろうか．

2019 年 06 月 16 日