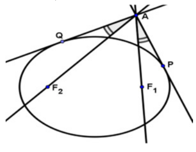
雑感　新定理かどうかのチェック

■　幾何学に限った話ではないのだが，ここでは幾何学（初等幾何と言って良いかどうかは疑問）の定理についての話とする．

教科書や参考書・問題集に載っていないような定理を見つけたとして，それがすでに知られている定理なのかどうかを調べる方法はないものであろうか．



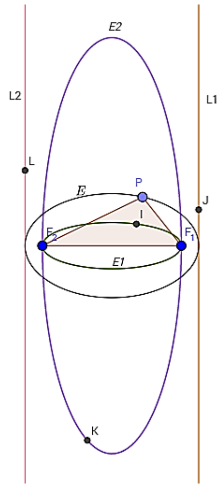
例えば，右図のように楕円外の点 A から楕円に引いた 2 本の接線 AP，AQ と焦点 F_1，F_2 に対して $\angle PAF_1 = \angle QAF_2$ が成り立つような気がするが….

実はこれは 2000 年も昔に証明済みの定理である．ただし，証明は容易ではない（昔，某大学に証明が出題された）．

■　これがすでに知られた定理であることは,『幾何学大辞典 1』(岩田至康，槇書店，1971）の 696 に載っていることから分かる．ちなみにアポロニウス（紀元前 262 頃－190 頃）によるらしい．

この辞典は第 6 巻まであり，さらに補巻が第 2 巻（1993）まで刊行されているが，現在は古書でしか入手できない（槇書店は閉店）．

この辞典には膨大な数（数千かそれ以上？）の定理が載っているので，そこから探し出すのも容易でない（実を言うと，余り分かり易い配列でない）．さらに，ここにすべての定理が収録されていると限らないし，辞典刊行以降に見つかった定理だってあるはずだ．



■　SSH の「課題研究」で，Y 君が次のような性質を見つけた．

楕円 E 上の点 P と 2 つの焦点 F_1，F_2 に対して，$\triangle PF_1F_2$ の内心を I，傍心を J，K，L（図を参照）とする．P が E 上を動くとき，I と K は楕円 E_1，E_2 を，J と L は長軸上の頂点を通り長軸に垂直な直線 L_1, L_2 を描く（もちろん除外点はあるが，細かいことは省く）．証明も（ある意味計算だけなので）きちんとできた．

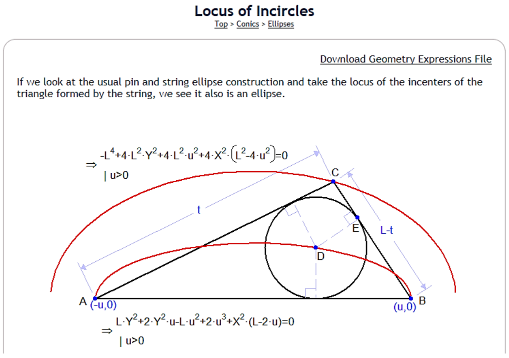
果たして，これは新定理か？

なお, 私の計算では，E_1 と E_2 は相似である．また，2 つの焦点の代わりに長軸上の中心に関する対称点（焦点ではない）とで三角形を作った場合ではこの性質は成り立たないので，「焦点」は重要な条件であることも確認した．

■　『幾何学大辞典』の本巻には載っていないような気がする（調べに自信はない）．補巻を所有している図書館は少なく，調べ切れていない．

「楕円　焦点　三角形　内心　傍心」などでググって見ても，それらしい情報は見つからない．こういったとき，実は画像検索が有効なことがあることを，ある経験を通して知っている．しかし，それでも見つからないまま時間が過ぎた．

■　ある日，日本語ではダメかもと思い，「ellipse incenter locus」で検索して（画像検索ではない），次々探していく中で「Ellipses - Geometry Atlas」というサイトを見つけた．その中に「Locus of Incircles」というページがあり，そこに内心の軌跡が載っていた．



残念ながら，新発見ではないことが判明したが，傍心については何とも言えない．

■　この頁は "Geometry Atlas" の一部であり，全体では幾何の定理が 383 個，紹介されている．

この個数の定理では幾何の定理を網羅できているはずもないので，ここに載っていないからと言って新発見だとは言えないのは当然である．

■　実を言うと，Y 君はもう 1 つ別の定理を発見しているが，これは『幾何学大辞典』に掲載済の定理であった．

2017 年 11 月 15 日