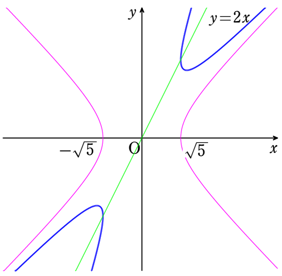
雑感　傾いた双曲線の軸

■　方程式 $y=ax\pm\sqrt{x^2-b^2}$ （$a\neq0,\ b\neq0$）が表す図形は，直線 $y=ax$ と双曲線 $y=\pm\sqrt{x^2-b^2}$ を合成した図形で，傾いた双曲線を表す．



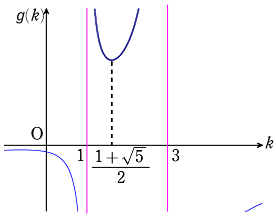
たとえば，$y=2x\pm\sqrt{x^2-5}$ は右図の青い曲線である．

■　この双曲線の主軸の方程式は楕円の場合と同様に，次のように求めることができる．

O がこの双曲線の中心であるから，主軸の方程式を $y=kx$ とおき，この直線と双曲線との交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ k\alpha)$ とおくと，線分 OA の長さが最小となる場合が主軸である．

ここでは，具体的に $y=2x\pm\sqrt{x^2-5}$ で話を進めたい．

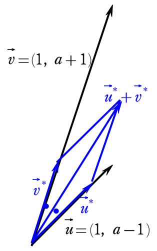
この双曲線は $(y-2x)^2=x^2-5$ と同値で，$y=kx$ を代入すると $x^2=-\dfrac{5}{(k-1)(k-3)}$ となるから，$\mathrm{OA}^2=(1+k^2)\alpha^2$ より $\mathrm{OA}^2=g(k)$



とおくと $g(k)=-\dfrac{5(k^2+1)}{(k-1)(k-3)}$ である．ここで，$x^2>0$ から $(k-1)(k-3)<0$ であり，$1<k<3$ である．この範囲で $g(k)$ の最小値は $g\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ となるから，主軸の傾きは $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．

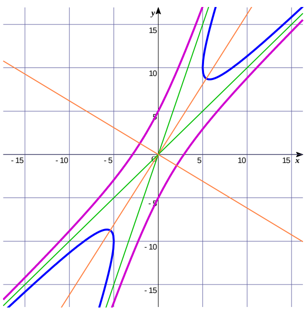
$y=ax\pm\sqrt{x^2-b^2}$ で同様に計算すると，主軸の傾きは $\dfrac{\sqrt{a^4+4}+a^2-2}{2a}$ となる．

■　さて，$y=ax\pm\sqrt{x^2-b^2}$ の漸近線は $x\to\pm\infty$ のとき $\sqrt{x^2-b^2}\fallingdotseq\pm x$ であるから，$y=(a\pm1)x$ の 2 本である．したがって，この 2 直線の角の 2 等分線が主軸になると考えることもできる．



すると，2 本の漸近線の方向ベクトル $\vec{u}=(1,\ a-1),\ \vec{v}=(1,\ a+1)$ を単位ベクトル化した 2 つのベクトル $\vec{u}^*=\dfrac{1}{\sqrt{1+(a-1)^2}}(1,\ a-1)$，$\vec{v}^*=\dfrac{1}{\sqrt{1+(a+1)^2}}(1,\ a+1)$ の和 $\vec{u}^*+\vec{v}^*$ の方向が主軸の傾きである．この傾きは $\dfrac{(a-1)\sqrt{1+(a+1)^2}+(a+1)\sqrt{1+(a-1)^2}}{\sqrt{1+(a+1)^2}+\sqrt{1+(a-1)^2}}$ であるが，計算すると $\dfrac{\sqrt{a^4+4}+a^2-2}{2a}$ となって，先の結果と一致する．

■　なお，軸の傾いた双曲線には $y=ax\pm\sqrt{x^2+b^2}$ もあるが，これは先ほどの双曲線と漸近線を共有する「共役な双曲線」である．したがって，その主軸は先ほどの双曲線の主軸と直交する．



右図の紫が $y=2x\pm\sqrt{x^2+5}$ のグラフである．

2012 年 7 月 14 日