

雑感 常用対数値と大学入試

■ 国公立の2次試験が迫ったある日のYhoo 知恵袋。

Q: 数学の常用対数についてです。

大学の個別試験の記述問題なんですけど、本番でもし常用対数の値が問題文で与えられていなくても、 $\log_{10}2=0.3010$ であることを利用して計算式を書いていってもいいのでしょうか？

$\log_{10}2$ の値を使わなくても解けるけど、使ったほうが解きやすい問題があったので気になりました。

A1: 良いんじゃないですかね？

Q: そうですか？ 使いたいですけど、それで減点されるのなら嫌だなと思ひまして…

A1: うーん たまに数値的に評価する問題出ますけど $\sqrt{2}$ とかは使ってよくて、 \log_2 を使っちゃいけない理由が僕には分からないので僕は良いと思いますが… 採点者がどう思うかですね

A2: $\log_{10}2=0.3010$ を使うことは想定していないので使わないほうが良いと思います。

使ったら×や減点にされるかと聞かれるとそれはわかりません。

Q: そうですね、使わないでおきます。

万が一それ以外の解き方がわからないときだけにしておきます。

A3: 与えられてなければ使ってはだめ

特にその値を使って答えを出した場合は点数がなくなると思っただ方がよい (実際にはそれなりに部分点がつくだろうけど)

Q: そうですね、使うとしても、それ以外の解き方がわからないときにダメ元で書くくらいにした方がいいですね。

A4: 与えられてないとしても \log を使う理由を明記すればいいと思うよ 結局のところ解があてれば正義

Q: 理由というのは、どういうものでしょうか？

A4: 問題によりけり

■ A2 が最終的にベストアンサーに選ばれているが、私も同意見。

A1 が「 $\sqrt{2}$ とかは使ってよくて、 \log_2 を使っちゃいけない」と言っているが、 $\sqrt{2}$ だって勝手に ≈ 1.414 とするのは拙かろう。

もし、 $\sqrt{2} \approx 1.414$ を使いたければ、ちょっとした算数をして、「 $1.414^2 = 1.999396 < 2 < 1.415^2 = 2.002225$ だから」のようなコメントを書いた上で適切に使うべきだろう。

しかし、 $\log_{10}2$ ではこのようなことが簡単にはできない。もちろん、精度が荒くて良ければ $10^3 < 1024 = 2^{10}$ から、 $3 < 10 \log_{10}2$ より $0.3 < \log_{10}2$ 程度のことはできないわけではないが。

■ 2019年京都大学、2頁にわたる常用対数表を載せている。

i は虚数単位とする。 $(1+i)^n + (1-i)^n > 10^{10}$ をみたす最小の正の整数 n を求めよ。

左辺を極形式表示し、ドモアブルの定理を使って変形すれば、

$2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} > 10^{10} \dots \textcircled{1}$ が得られる。これより、 $2^{1+n/2} > 10^{10} \dots \textcircled{2}$ が

必要だが、 $\cos \frac{n\pi}{4} > 0$ となる $n \equiv 0, \pm 1 \pmod{8}$ の場合のみ考える。

②の両辺の常用対数をとるとき、与えられた常用対数表から $\log_{10}2 = 0.3010$ としていたところだが、実は表下に、註記がある。

5.3	.7243	.7321	.7399	.7477	.7555	.7633	.7711	.7789
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7

小数第5位を四捨五入し、小数第4位まで掲載している。

したがって、 $\log_{10}2$ の値を不等式評価する必要がある。

$1 + \frac{n}{2} > \frac{10}{\log_{10}2}$ だから大きく評価して $\log_{10}2 < 0.30105$ より、

$1 + \frac{n}{2} > 33.2 \dots$ よって、 $n > 64.4 \dots$ となり、65以上の整数で探すことになる。65以上の整数で、 $n \equiv 0, \pm 1 \pmod{8}$ となる整数は、65, 71, 72, …である*。(計算を省くが) 順に調べて $n = 71$ となる。

■ 2008年には京大は 0.5° 刻みの三角関数表を載せたが、数表は京大の趣味のようである。表まで載せれば、質問者の心配は無用だ。

*) : ここからすぐ $n=65$ を答とできないのは、 \cos の値が関係している。①で \cos の値が1のとき②になるが、 $n=65$ のとき \cos の値は $1/\sqrt{2}$ である。なお、 $n=71$ のときも \cos の値は $1/\sqrt{2}$ だが、 n の値が大きいため $2^{1+n/2}$ の値が大きくなり①が成立。