雑感　正多面体と「視力」または「記憶力」

■　2010 年の大阪大学の入試問題に，次があった．

> l, m, n を 3 以上の整数とする．等式 $\left(\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\right)l=2$ を満たす l, m, n の組をすべて求めよ．

整数問題の大学入試問題としてはそう難しくはない．

■　ところが，この方程式の解である
$(l,\ m,\ n)=\ (4,\ 3,\ 3),\ (6,\ 3,\ 4),\ (8,\ 4,\ 3),\ (12,\ 3,\ 5),\ (20,\ 5,\ 3)$ が「正多面体は 5 種類しか存在しない」という証明に結びついているのだという．

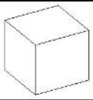
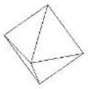
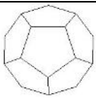
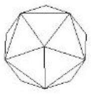
このことは，白坂繁氏（鹿児島高専）の発行する『「高数研」案内と報告』の第 141 号（2010 年 3 月 15 日発行）の宿題で提起され，第 142 号（2010 年 4 月 19 日発行）で種明かしされた．

■　この「案内と報告」によれば，次の通りである．

頂点，辺，面の個数をそれぞれ v, e, f とすれば，オイラーの多面体定理は，$v-e+f=2$ である．

正 n 角形を l 個用いて正多面体を作る．頂点から出る辺の数を m とすれば，頂点周りの面の数，多面体全体の辺の数から
$l=f$, $nl=2e$, $vm=2e$ が成り立ち，$v-e+f=2$ に代入すれば，
$\left(\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\right)l=2$ が得られる．

この解と正多面体の関係を表にすると，以下のようである．

	正 4 面体	正 6 面体	正 8 面体	正 12 面体	正 20 面体
l ：面	4	6	8	12	20
m	3	3	4	3	5
n	3	4	3	5	3
$e=\dfrac{nl}{2}$ ：辺	6	12	12	30	30
$v=\dfrac{nl}{m}$ ：頂点	4	8	6	20	12
図					

■　私などはこの問題を解いても，「ちょっと変わった形の方程式だなあ」くらいにしか思わなかった．オイラーの多面体定理の知識はあっても，それに結びつかない浅はかさである．

世の中には「視力」がよいというか，記憶力が優れている方がいるものだなあと，そのご慧眼に敬服するばかりである．

■　なお，この方程式の解法にも様々なアプローチがあるようだが，私は m について解いて　$m=\dfrac{2nl}{nl-2l+4}\geqq 3$ から
$(6-n)l\geqq 12$ を導き，$3\leqq n\leqq 5$ という絞り込みをした．