雑感　東大の漸化式に関するメモ

■　2022 年，東京大学理系の第 2 問.

数列$\{a_n\}$ を次のように定める.
$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n{}^2+1\ (n=1,2,3,\ldots)$
(1) 正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ.
(2) $k,\ n$ を正の整数とする．a_nがa_kの倍数となるための必要十分条件を $k,\ n$ を用いて表せ.
(3) a_{2022} と$(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ.

$a_1=1, a_2=2, a_3=5, a_4=26, a_5=677, a_6=458330, \ldots.$ であり，5 で割った余りは順に，1, 2, 0, 1, 2, 0,....と周期的に繰り返し，n が 3 の倍数のとき 0 である.

2022，8091 が共に 3 の倍数なので，a_{2022}，a_{8091}は共に 5 の倍数で，$(a_{8091})^2$は 25 の倍数．このとき，a_{2022} と$(a_{8091})^2$ の最大公約数は 5 なのか，5 より大きい 5 の倍数なのか？

今年の西暦年号 2022 に対して 8091 は何だろうと思ったが，一般的に 2022×N+3（N：自然数） と表される値の 1 つであった.

■　この数列は，OEIS（整数列大辞典）の A003095 に登録されている (https://oeis.org/A003095).

1，2，5，26，677，458330，210066388901，44127887745906175987802，
1947270476915296449559703445493848930452791205，
3791862310265926082868235028027893277370233152247388584761734150717768254410341175325352026，…

といった数列で爆発的に増加する.

The rightmost digits cycle (0,1,2,5,6,7,0,1,2,5,6,7,...).とあるように，10 で割った余りに周期 6 の周期性があり，5 で割った余りに周期 3 の周期性がある．このことが，上の問題に関係している.

一般項は求まっていないが（求まるのか？），
a_nはc^{2^n} $[c=1.225902443528748538386277474959130085213]$に漸近するとある.
試みに，$[c^{2^n}]$を計算すると，
$1, 2, 5, 26, 676, 458271$，$210012800214, \ldots$ となり，なるほどと思う一方，やや微妙でもある.

■　この漸化式は係数，初項などがごく自然で，「ちょっと変わった漸化式」を考えたとき，思いつく漸化式の 1 つである.

そこで，次のような質問（一部略）が質問箱に.

以前に友人らとこの数列の一般項を出そうと頑張ったんですけどできなかったんです。
やっぱりこの数列は、一般項を記述することはできないんですか？
(https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q10258017735?__ysp=5p2x5aSn44CA5LuK5bm044CA5ry45YyW5byP)

これに対して（マニアックな？）回答があり，次の記述がある.

a(n+1)=a(n)^2+g(n)(g(n)は与えられた条件の良い数列)の形で与えられる数列は、ある定数 k に対し、十分大きい n に対して a(n)=[k^(2^n)] の形でかけることがしられています。ただし[x]は x を超えない最大の整数(ガウス記号)です。

今回の漸化式は k=exp((1/2)log2+(1/4)log(5/4)+...)=1.502837... に対し、n≧2 に対して a(n)=[k^(2^n)]とかけます。つまりこれが一般項になります。

上の c とこの k の値が異なるが，a(n)=[k^(2^n)] が間違いであり，$c^2=k$ であって，a(n)=[k^(2^(n-1))]が正しい式であると考えられる.

この k=exp((1/2)log2+(1/4)log(5/4)+...) については，次のような補足があり，2 の指数の訂正があるがその訂正も間違っていて，
$A\ n\ =\log\left(1+\frac{1}{a_n{}^2}\right)$ に対して，$k=a_1\sum_{i=1}^{\infty}A(i)2^{-i}$
が正しいと思われる（私の勘違いかも知れぬが…）.

■　また，この回答に以下の参考文献も示されていることも，触れておきたい.

https://www.fq.math.ca/Scanned/11-4/aho-a.pdf

2022 年 04 月 01 日