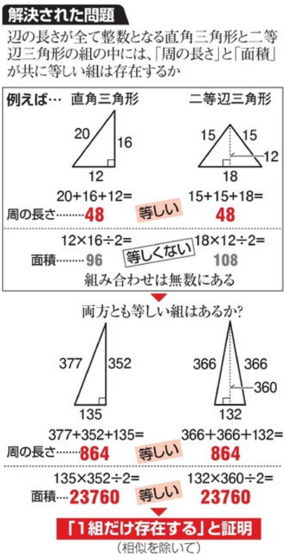
雑感　特殊な三角形のペア

■　2018 年 9 月 19 日の朝日新聞朝刊に「世界に 1 つだけの『三角形ペア』発見　慶大院生 2 人証明」との記事が載った.

■　世界に 1 組だけ，特別な関係を持つ三角形が存在する――．図形を扱う数学の幾何学に関する定理を，慶応大の大学院生 2 人が証明した．定理自体は小学生でもわかる内容．2 人は「数学の奥深さや面白さを楽しんでほしい」と話している．

証明に取り組んだのは，幾何学の問題で，「辺の長さが全て整数となる直角三角形と二等辺三角形の組の中には，周の長さも面積も共に等しい組は存在するか」というもの．慶応大大学院理工学研究科で数学を学ぶ大学院生の平川義之輔さん（28）と松村英樹さん（26）の 2 人が昨年 12 月に挑み始めた．

2 人はまず，三角形がたくさん出てくる幾何学の問題を，式を扱う代数方程式に変換させ，解がいくつ存在するか，という問題に置き換えた．その上で，現代数学の手法「数論幾何学」を用いて解いたところ，解が 1 つ存在することがわかった．



周の長さと面積が共に等しいものは，相似を除いて，「135，352，377」の辺を持つ直角三角形と，「132, 366, 366」の辺を持つ二等辺三角形の 1 組だけと証明された．定理は今後，「平川―松村の定理」などと呼ばれる．

数学が生まれた古代ギリシャ時代には，「ピタゴラスの定理」など幾何学の問題は盛んに研究されてきた．平川さんは「私たちが証明した定理は，ギリシャ時代にも研究されていただろう．そんな定理が，数千年の時を経て，高度な現代数学の力で証明されたことはとても珍しく，また面白い」．松村さんも「（証明まで 350 年以上かかった）フェルマーの最終定理のような素朴な定理を証明することに憧れていたので，結果が出てうれしい」と話している．

研究成果の論文「A unique pair of triangles」は，米国の整数論専門誌「ジャーナル・オブ・ナンバー・セオリー」に掲載された．

（石倉徹也）

■　掲載の図と併せて記事を読めば誤解はないと思うが，「直角三角形 R と 2 等辺三角形 I があり，それらの辺の長さはすべて整数である．このとき，それぞれの面積を S_R, S_I，周長を L_R, L_I とすれば，$S_R = S_I$ かつ $L_R = L_I$ を満たす R と I の組がただ 1 組存在する」ということである．

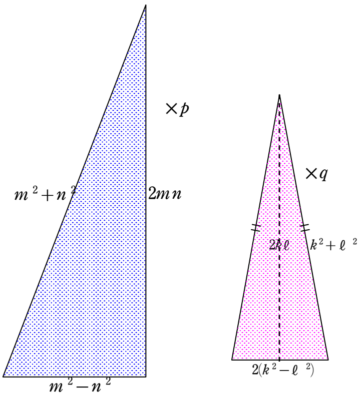
■　小学生にも定理の意味が分かり，高校生ならすぐに証明できそうに見えても，そうは問屋が卸さないのだろう．

数式化を試みると，登場する文字はすべて正の整数であるとして，例えば右のような設定では

$(m^2-n^2)mnp^2 = 2(k^2-\ell^2)k\ell q^2$

かつ　$2m(m+n)p = 4k^2q$

である．



ただし，底辺と高さを入れ替えた場合も考える必要があるので，他のパターンの 3 組の連立方程式についての考察も必要である．

ただし，彼らの立式がこのようなものであるかどうかは不明であることに，注意されたい．

■　6 つの未知数に対して，2 つの方程式が分かっている整数方程式であり，存在する 1 組は上の設定において $p=1$, $q=6$, $m=16$, $n=11$, $k=6$, $\ell=5$ の場合になっている．解の三角形において，最小角は R が $2\arctan(5/27) \fallingdotseq 20.983°$，$I$ が $4\arctan(1/11) \fallingdotseq 20.778°$ で近い値である．

2018 年 10 月 01 日