雑感　「クライマックスシリーズの必勝確率」について

■　雑誌『初等数学』第 77 号（2015 年 10 月号）に，「クライマックスシリーズの必勝確率」という研究が載っている．この内容に関して，若干の考察を加えた．

■　年間の成績で第 1 位だった A チームと，ファーストステージを勝ち上がった B チームがファイナルステージで対決する．

1 つの試合で A チームが B チームに勝つ確率が x $(0<x<1)$ であるとする．

A チームに 1 勝のアドバンテージが与えられ，先に n 勝したチームが優勝するルールで，A チームが優勝する確率 $p_n(x)$ は　$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-2}{k}x^{n-1}(1-x)^k$　である．

また，アドバンテージが与えられない場合，先に n 勝したチームが優勝するルールで，A チームが優勝する確率 $q_n(x)$ は

$q_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}x^n(1-x)^k$　である．

ここに，$\binom{n}{r}={}_n\mathrm{C}_r$ である．

我が国のプロ野球では $n=4$ であるが，上のように一般化を図ってみた．

このアドバンテージ設定のルールが，第 1 位のチームにどのように「有利」であるかを，x の値との関わりでみるとき，判断の方法が様々考えられる．

■　「研究」では，1 つには $p(x)=\frac{1}{2}$ となる x の値を判断材料にしている．「互角」になるための x の値と言うことである．

$n=2,\ 3,\ 4,\ 5$ におけるその値は次のようになる．

n	2	3	4	5
$p(x)=1/2$ の近似解	0.292893	0.385727	0.421407	0.440155

勝ち数 n の設定が小さい場合には，圧倒的に A チームが有利であると判断できる．

■　もう 1 つの判断としてこの「研究」では，アドバンテージの有無から，$p(x)$ と $q(x)$ の大小を見ている．

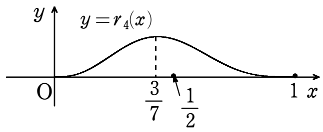
$p(x)$ と $q(x)$ の大小に関しては，$0<x<1$ において常に $p(x)>q(x)$ である（つまり x の値にかかわらず，アドバンテージの付与が有利であるということで，当たり前のことである）が，$r(x)=p(x)-q(x)$ として，$r(x)$ の値の変化まで見ると，もう少し考察を深めることができるような気がする．

$n=2,\ 3,\ 4,\ 5$ における $p_n(x),\ q_n(x),\ r_n(x)$ は次のようである．

n	$p(x)$
2	$x(2-x)$
3	$x^2(3x^2-8x+6)$
4	$-x^3(10x^3-36x^2+45x-20)$
5	$x^4(35x^4-160x^3+280x^2-224x+70)$

n	$q(x)$	$r(x)$
2	$x^2(3-2x)$	$2x(1-x)^2$
3	$x^3(6x^2-15x+10)$	$6x^2(1-x)^3$
4	$-x^4(20x^3-70x^2+84x-35)$	$20x^3(1-x)^4$
5	$x^5(70x^4-315x^3+540x^2-420x+126)$	$70x^4(1-x)^5$

$r(x)$ は $x=\frac{n-1}{2n-1}$ で極大となり，この値は $n\to\infty$ に対して単調に増加し，$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n-1}=\frac{1}{2}$ である．



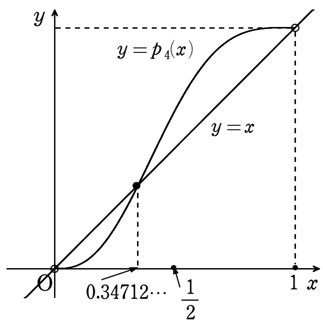
$n=4$ のとき，$x=\frac{3}{7}=0.42857\cdots$ で極大となる（右図）．

$x=0$ や $x=1$ に近い値では，このアドバンテージはさほど有利には働かない．言ってみれば，「試合するまでもない」状態だからであろう．

一番有利に働くのは，$n=4$ の場合では，$x=\frac{3}{7}$ のときである．

■　この 2 つの判断では，x の値にかかわらず，常に A チームが有利になっている．しかし，次のような「判断」では，x の値によって，A チームが不利になる場合もある．

■　アドバンテージがなく，1 回だけの試合で優勝者を決める場合との比較である．つまり，1 回こっきりのガチ対決と比べてみる．



$n=4$ の場合について調べる．

$y=p_4(x)$ と $y=x$ を比較すれば良く，右図のようにこの 2 つのグラフは $x=0.34712\cdots$ を境に上下が逆転する．

ということは，x がこの値よりも大きい場合はアドバンテージのあるルールの方が有利だが，ガチ対決では x がこの値より小さい場合は不利になる．

シーズン初めは快調で快進撃を続けて，早々に第 1 位を決めたものの，シーズン終わりになって（投手陣の相次ぐ故障などで）失速したような場合，アドバンテージがあるから有利だなどと言っていられない事態がありうるが，そう言う状況を語るに十分な判断材料である．

■　なお，「実力考査」などでこの内容を出題するとき，$n=4$ の設定はちょっと大変で，$n=3$ くらいに設定し直すとよい．その場合，最後の有利不利の分かれ目となる x の値は，

$p_3(x)=x$ すなわち $x^2(3x^2-8x+6)=x$ から

$x(x-1)(x^2-5x+1)=0$ を解いて，$x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$　（≒0.232408）

と求めることができる．

なお，$p_3(x)=\frac{1}{2}$ という方程式は $6x^4-16x^3+12x^2-1=0$ と同値で，これを因数定理で解くことはできない．

2015 年 11 月 2 日