

雑感 Yahoo 知恵袋の興味深い問題(3)

■ 最近の Yahoo 知恵袋から. 数式は見やすいように直した.

■ $2^x = 3^y = 5^z$ (x, y, z は正の実数)のとき $2x, 3y, 5z$ (ママ)の大小を比較せよ. この問題の解き方を教えてください.

これに回答があつて, それが x, y, z の大小関係を答えているものだったので, $2x, 3y, 5z$ の大小関係についての回答を書いた.

$2^x = 3^y = 5^z = k (> 1)$ とおく.

$$x \log 2 = y \log 3 = z \log 5 = \log k \quad \text{より} \quad x = \frac{\log k}{\log 2}, \quad y = \frac{\log k}{\log 3}, \quad z = \frac{\log k}{\log 5}.$$

ここで, $f(x) = \frac{x}{\log x}$ とおくと

$$2x = f(2) \log k, \quad 3y = f(3) \log k, \quad 5z = f(5) \log k.$$

$k > 1$ より $\log k > 0$ であるから, $f(2), f(3), f(5)$ の大小を比較すればよい.

$$f'(x) = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2} \quad \text{から} \quad x > 1 \quad \text{において}$$

$f(x)$ は $x = e$ で極小.

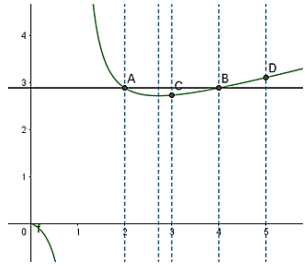
(増減表省略: グラフ添付の通り)

さらに, $f(2) = f(4)$ なので

$$f(2) > f(3) < f(4) = f(2) < f(5)$$

より $f(3) < f(2) < f(5)$

ゆえに $3y < 2x < 5z$.



このようにある適切な関数を登場させ

て増減を調べるという問題は, 生徒の力を見るにはうってつけだ. しかし, 生徒の様子次第では, あらかじめ誘導してこの関数のグラフを描かせたりするという必要があるかもしれない (そうになると面白くもない問題になり下がってしまうが).

質問者からは何の反応もなく, しばらくして質問が「削除」されていた. 質問者のこういった行動の意図が, 全くつかめない.

回答を理解できないのか, 回答をゲットできたからそれでよしとしているならば, 身勝手なことだ.

■ $\sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9}$ の値をどのようにして求めるのかわかりません.

わかる方説明お願いします.

次のように回答してみた.

$\theta = \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, -\frac{4\pi}{9}$ の3つの値に対して, $\sin \theta$ の値はすべて異なる (単位円に図示すればわかる) が, $\sin 3\theta$ の値はすべて等しく $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である.

また, $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ (3倍角の公式)

であるから, $\sin \theta = x$ とおけば3次方程式 $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ の3つの解

$$\text{は, } \sin \frac{\pi}{9}, \sin \frac{2\pi}{9}, \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right) = -\sin \frac{4\pi}{9}.$$

したがって, 解と係数の関係により $\sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \left(-\sin \frac{4\pi}{9}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{8}$

$$\text{よって} \quad \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

質問者から「なるほど! こんな面白い解法があるのですね. このご回答は自分が知っている公式しか使っておらず分かりやすかったので, こちらの回答をベストアンサーとさせていただきます。」

■ 分度器なしで36度を測る方法がありますか?

正五角形の作図などの手順を示し, 正五角形を描いて…といった回答がいくつかあったが, もっと手軽な方法として, 提案し, 回答した.

等幅のテープ (箸袋など) を結んで, 次のような折り紙をしたことはありませんか?

正確に等幅な紙で, キッチリ折れば, そこに 36° の角ができています.

これも, ベストアンサーになったが, 会心の回答.

